MECCANICA
SUBLIME
DIMOSTRATA COLL' ALGEBRA

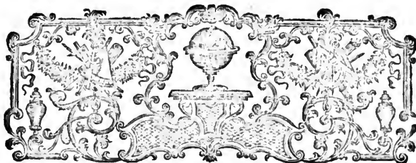
D E L

DOTT. DOMENICO BARTALONI

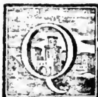


IN NAPOLI MDCCLXV.

Nella Stamperia di Giuseppe Raimondi
CON LICENZA DE' SUPERIORI.



PREFAZIONE.



Uantunque sotto il general nome di Meccanica v'abbian compreso molti tutto ciò ch' alla Statica, e ch' alla Matematica mista, ovver Fisico-Matematica egli riguarda, la prima delle quali ricordate scienze all' equilibrio, e la seconda al solo moto de' gravi spettante; tuttavia però comunemente oggidì soltanto quest' ultima con tal nome s' appella, e la quale altrimenti, per l'uso delle Scuole d' Italia invalso, Meccanica sublime si nomina.

Ella è pertanto questa una Scienza, che da alcune semplicissime leggi della Natura, per la ragione, ed esperienza dedotte, trae gli stabili fondamenti suoi, e principj: dalla combinazion de' medesimi si stabiliscon poscia canoni, e teorie, le quali stese in oltre, ed in varie guise ampliate da arguti, e sottilissimi pensamenti, da ingegnose, e quasi innumerabili riflessioni, da raziocini, per dimostrazione, e legittime induzioni d' ade-

quati , e sodi concepimenti forniti , forman elle dipoi l' oggetto di questa nominata facoltà.

Nè le teoriche in essa stabilite riescon dall' altro canto inutili pensieri, o insufficienti concetti, conforme di moltissime speculazioni ad altre scienze aitinenti, suole egli , come è ben noto avvenire; posciachè son elleno nella vita sociale di pratica continua , ed utilità non poca , direttamente servendo alcune per l' uso , ed indigenze della medesima, ed altre, comechè nella Fisica , e corso degli Astri applicate , e quindi però nella Geografia, e Nautica avendo luogo, oltre alla commendabile curiosità cui servono , indirettamente pure anche alla felicità nostra dirette sono, ch' egli è per appunto quel solo fine , al qual dovrebber le scienze tutte , con i loro Trattati riportarsi.

Il gran Galileo , che fu per ogni facoltà fertilissimo inventor di principj, e che secondo il detto del celebre Fontenelle, può dirsi ch' ei vada alla testa di tutte le moderne dottrine , fu anche egli il primo , che gettò i fondamenti di questa Scienza . Sopra di essi vi travagliarono in seguito sublimissimi ingegni tanto Italiani, ch' Oltramontani insieme, e specialmente dopo l'ingegnoso ritrovamento del Calcolo degli Infiniti , allora fu , che per opera di quei celeberrimi Matematici il Newton, il Leibnizio, l' Ugenio, il Varignone, Giovanni Bernoulli, l' Ermanno, il Gregori, il Keilli , il Padre Grandi, ed altri molti, si videro ampliate, ed in particolari trattati, e per Atti d' Accademie, e Giornali le teorie de' movimenti, chi con la Geometria ad uso degli Antichi , e chi coll' Algebra maneggiando le particolari dimostrazioni.

Stando però disperse , e così alla rinfusa in varie forme trattate le predette teoriche, si propose in seguito

to il profondiſſimo Matematico Leonardo Eulero d' ordinarle metodicamente in diverſi, e ſpecifici Trattati, coll' applicarvi in tutto, e per tutto l' Algebra, come mezzo riputato più facile, e ſpedito alla loro intelligenza. Così che raccogliendo quanto di buono, e proprio al ſuo diſegno, che per avanti ſu ciò era ſtato ſcritto, e di più nuovi metodi, e principj rinvenendo, ſiccome anche le trattate quiſtioni a queſti adattando, riduſſe per così dire, le preſenti teoriche a forma di particolare e ſpecifica ſcienza, con quella ſua inſigne Opera, in due volumi compreſa, che Meccanica, ovvero Scienza del moto la nomina.

Ella è ſenza meno l' Opera predetta, per quanto la materia il comporta, per ſe ſola ſufficiente ad un intiero corſo di queſta ſcienza, ſecondo il general conſentimento degli Eruditi; poſciachè non ſolamente rende iſtrutti i lettori delle principali teoriche de' movimenti, e loro metodi nel trattarle, ma pienamente gli informa eziandio dell' intiero algebraico calcolo, che con ſomma maeſtria, e finezza vien quivi applicato; e così per conſeguenza poſſono eſſer reſi i medeſimi capaci pure anche d'innoltrarſi nella lettura, non ſolo degli Autori, che tali materie han trattate, ma altresì ancora de' più ſublimi nelle matematiche facoltà. Non oſtante però riflettendo io dall' altro canto, che o troppo voluminoſa, e inſieme ſe non oſcura, almeno che non facile rieſcire ella poteſſe ad intenderſi da' giovani ſtudioſi delle preſenti materie, sì per i calcoli elaborati nel maneggiar le teorie, e canoni, come pure per li metodi, e combinazion de' principj; e che quindi più per gli intendenti, e profondi Matematici, che per i principianti confaccia, ho perciò a vantaggio de' medeſimi, e ſpecialmente della gioventù Italiana intrapreſa la preſente fatiga. Non

Non vi è chi ingnori, che le dottrine del movimento tanto estendersi elle possono, quanto il moto stesso aver può luogo in Natura: e quindi anche in varj aspetti, e sotto diverse maniere le sue teoriche trattar potrannosi. Onde è che difficil cosa riescirebbe a chi volesse per ogni teoria in ispecie maneggiarne, ed assegnarne le particolari leggi, e speziali maniere. Siccome però di certe essenziali proprietà, e passioni, egli è il moto suddetto fornito, così determinando di queste le respettive teoriche, e sotto facile, e general metodo comprendendole, si potrà poscia agevolmente dedurne nella sua vasta estensione un certo tal qual lume, e scorta, ch' all' intelligenza ei serva de' particolari Trattati; quale per appunto è stato egli quel fine, che nella presente Opera proposto mi sono, de' di cui componenti principj ne farò adesso brevemente l' analisi.

Il moto nel più ampio aspetto considerato, come una cagione ei può dirsi di tutto quanto si compone, e scompone nell' ordine delle create cose, e cessando il medesimo, havvi ragion di credere, o ch' il tutto in una massa informe convertirebbesi, ovvero ch' altra mutazione nella natura avverrebbe, della quale facil cosa non è da noi assegnarne l' essere. Ma essendo tal discussione piuttosto alla Filosofia ch' alla Meccanica, di cui intendiamo parlare, ella attinente, quindi è che da' Meccanici soltanto in quell'aspetto riguardasi, in quanto egli è una traslazione del grave da luogo, a luogo eseguita. Le primarie sue affezioni, e proprietà, che gli spazj, e tempi scorsi, e velocità elle sono, e ch' altresì come un effetto pur del medesimo riguardansi, alle linee, e superficie delle quali la Geometria si vale, possonsi giustamente adattare; e costruendone la Figura pel mezzo di esse, espor si potranno i loro rapporti, con l' ajuto della

della Geometria ſteſſa, ad evidente dimoſtrazione; dalla quale poſcia in virtù dell' Algebra fiſſandone col calcolo l'equazione, ſi ſtabiliranno canoni, e leggi, che come fondamenti, e principj ſerviranno della Meccanica facoltà: il che effettivamente del moto uniforme, uniformemente accelerato, e ritardato ſi è da me eſeguito, a ſolo fine, ch' al profferir delle voci più agevolmente conneſſa vada chiara, e diſtinta idea del loro ſignificato.

I canoni ſopraccennati dall' altro canto mai fiſſar potrannoſi, s' il grave dall' infinita tardità ſua, o vogliam dir dalla quiete, all' affezione contraria, cioè al moto, ovvero dal moto alla quiete ei non paſſi. Per ciò ſuccedere egli è certo, che qualche efficiente cagione vi deve intervenire; onde è che queſta tal cagione, qualunque ella ſia, dovrà anch' eſſa avere il rapporto fra le paſſioni del movimento, ſiccome in fatti col nome di potenza, o forza s'include. Spiegar la natura di tal cagion produttrice, oltre a non eſſer ciò debito del Meccanico, il quale a determinarne gli effetti del moto ſoltanto egli attende, malagevol coſa al certo rieſcirebbe e ad eſſo, ad a chiunque altro ch' a tale aſſunto s' accingeſſe; quindi è che riguardando dunque quel ſolo effetto, ch' in virtù d' eſſa nel corpo accade, allorchè dalla quiete ſi move, ovvero alla quiete ſteſſa ritorna, ſarà come cauſa ella ammeſſa, quantunque propriamente parlando, piuttoſto del medeſimo moto dir ſi potrebbe occaſione. Tal ſarà la Gravità in primo luogo, l' Elaſticità, Tenacità di materia, la Reſiſtenza de' Fluidi, delle quali potenze tutte partitamente ſi parla nell' Opera.

Se queſta tal potenza, o forza nominata in viva e morta diſtinguer deeſi, inutili non credo i due diverſi concepimenti, e maggiormente ſe la viva, cioè quella

del

del grave allorchè è in moto, sia in diversa proporzione delle velocità, di quella d'allorchè è in quiete, siccome volle il Leibnizio, ed i suoi seguaci eziandio. Credeva dunque il medesimo, che mosso il corpo, quella qualunque forza, che ne era cagione, ritenesse ella la ragione de' quadrati delle velocità del medesimo. I Cartesiani poi a contrario, non ammettendo tal distinzione, sostenevano, e tuttavia pure anche sostengono, che la semplice ragione delle velocità dette ei ritenesse; la qual quistione per verità, ha per molti anni più del dovere agitate le menti de' Matematici più insigni. Gli spessi, e reiterati sperimenti per convincersi di quale, delle due rapportate leggi servasi ne' movimenti la Natura, poco han giovato al rischiaramento della controversia, secondochè il celeberrimo Padre Riccati ha concludentemente dimostrato ne' suoi Dialoghi delle forze vive; non ne deduce nè pur egli, quantunque adoprato siasi con sode, e diligenti ricerche, convincente prova in favore o dell'uno, o dell'altro partito, sebben che da certe convenienti ragioni, ad accettare il partito del Leibnizio inclinato egli sia.

Quel tanto però che da evidente dimostrazione vero risulta, si è, che se la potenza abbia la relazione, ovvero moltiplicata sia nello spazio dal grave scorso, al quadrato delle velocità ella è proporzionale, se poi si riferisca al tempo dal medesimo trapassato, sta allora nella ragion semplice delle medesime; quindi ammesse per vere tali due posizioni, come di fatto elle sono, e lasciando al tempo, ed a' fautori d'ambi i partiti discutere la quistione, due rapporti verremo ad aver con certezza della forza predetta, e così due formole si potranno per conseguenza stabilire, per procedere nelle ricerche de' movimenti; siccome realmente nell'Opera vien da me eseguito. Quel

Quel tal peso, che con ogni ragione può dirsi inerente ai corpi tutti, cioè la Gravità de' medesimi, ottiene come forza il primo luogo nella ragione de' movimenti. Sonosi immaginati i Filosofi che questa ad un tal punto tendente sia, ovvero secondo gli altri delle moderne Scuole, ch' i gravi tutti attratti sieno verso tal determinato punto, il quale, Centro de' gravi, o Centro comune s' appella. Qualora nella continuazion del corpo mosso non resti la suddetta forza sempre costante, ma bensì varii con qualche proporzione delle distanze dal punto predetto, porge così un' ampia estensione ai particolari Trattati. Il primo, che generalmente di tal variabilità facesse menzione, e che nel moto altronde l' ammettesse fu il dottissimo Viviani, siccome per esteso vedesi negli scritti suoi di Meccanica, de' quali alcune Proposizioni, in precisi termini, dal Padre Grandi dentro l' Opere del Galileo vengon riportate. Nel Borelli circa la gravità dell' acqua, nel Libro del movimento de' gravi si ravvisa eziandio un tal supposto, in qualche particolar proposizione; e Mr. Fermat nell' Opere sue postume sostiene, con certa tal legge, la stessa variabilità ancora egli. Il Newton consecutivamente esaminò poscia a fondo la materia, e non solo si valse di tal supposto ei pure, ma lo estese a varie ipotesi, e diverse ricerche: ed in virtù di tale asserto stabilendo anche portentosi sistemi, ha spinti quasi gli altri tutti a seguirlo, talmente che di particolari, e speciose dottrine è oggidì questa nobilissima scienza arricchita.

Oltre la forza, ch' al moto necessita il grave, un' altra circostanza v' interviene, che appellar la potremo esterna, ma ch' il moto stesso accompagna, la quale merita d' esser messa in conto ancora ella, per poterne determinar del medesimo le sue precise passioni. Il vacuo,

cuo, ed il mezzo resistente, o sia Fluido, in cui il mobile dirigesi, egli è per appunto la circostanza accennata. Parlandosi della retta direzione da esso tenuta, o vogliam dire, che sia rettilineo il movimento, se ponghiamo che nel vacuo venga diretto, la Gravità, ovvero qualunque altra potenza, che occasion dia al moto del grave, sarà per se sola bastevole, per quanto alla forza concerne, di fissar del medesimo le relazioni; a contrario poi nel mezzo resistente dirigendosi, vi avrà in tal caso d' altre ammissioni bisogno.

Il mezzo resistente, ovver Fluido, al corpo in esso mosso oppone resistenza, e perciò impedirà alla gravità del medesimo acciocchè non eserciti tutta la sua energia, cioè detrarrà di forza insita al grave stesso, e farà anche in sequela diminuire la di lui celerità. Dunque dalla prima potenza, che sforza, e da questa seconda, quale è l'ostacolo oppostogli, si comporrà tutta la forza motrice, o sia l' azione dal mobile suddetto esercitata; quindi è che tale composta azione sarà il vero rapporto della potenza, che aver dee luogo nel moto, di quando che il grave è diretto nel Fluido.

L' ostacolo, o resistenza accennata opponendosi, fa decrescere, come poco anzi abbiam detto, le velocità del mobile, onde è che della Resistenza stessa, una funzione diverrà la velocità medesima; e perciò potrem surrogarla in luogo d' essa, ed in quel valore con cui l' ipotesi richiede, o per meglio dire, con cui resister credesi il Mezzo, ovver fluido.

La Resistenza del fluido, come forza anch' ella potrà essere e costante, e variabile in esso fluido dirigendosi il moto; e di più la gravità eziandio, unitamente con la resistenza predetta, potrà esser sottoposta a tal variabilità ancora essa, ovvero alternativamente assumendole;

dole; cioè o l'una, o l'altra talmente ponendola, restando poscia una di esse invariabile solamente. Laonde coll' includervi tali posizioni, verremo ad aver comprese le relazioni tutte del grave, ed espressa così la vera natura, e proprietà di cotal movimento.

Se una sola potenza, ovvero anche più unitamente agiscono a spingere il grave rettamente, fuorchè il moto rettilineo, colla azion loro, produr elle non possono, siccome è per se manifesto: ma qualora sien due, che con direzioni diverse in uno stesso piano esercitino insieme nel grave suddetto il loro potere, egli è evidente altresì, che dalla retta direzione devierà movendosi; e perciò d' un moto dalle due potenze composto ei dovrà scorrere. Quindi posciachè in ogni istante di tempo, ovvero per ogni minimo spazietto si pone, che non cessi l'energia delle riferite potenze nel mobile, che liberamente dirigesi, ne verrà perciò la composizion di quel tal moto, il quale Curvilineo libero dicesi.

Descrivendosi una Curva qualunque dal projetto di libero movimento, vedesi chiaramente, che per effettuarsi tal descrizione necessario egli è, ch' il grave accennato si mantenga per essa in equilibrio. Ciò seguir non può se noi non supponiamo, o che niuna forza lo necessiti ad abbandonar cotal traccia curvilinea, o pure ch' in questa Curva sostenuto in equilibrio egli sia da due eguali potenze; quindi un cotal principio d' eguaglianza di forze sarà d' uopo computarsi eziandio; perciocchè queste potenze assegnate, e maneggiate cogli altri rapporti, entreranno come parte necessaria nella natura di tal Curvilineo moto, a fine di risolvere le particolari quistioni.

Se nel fluido, o mezzo resistente pongasi, ch' il moto divisato si operi, per le patite resistenze del mobile,

ſiccome del rettilineo fu ſopra ragionato, così parimente aggiugnere in eſſo dovrannoſi quei dati medeſimi, e con l'applicazione ivi anche accennata. Queſti ſono pertanto gli aſtratti, e metafiſici principj, di cui ſervito mi ſono per entro l'Opera, i quali poi maneggiati con le dovute applicazioni, porgon queſti la riſoluzione delle quiſtioni tutte, e conſeguentemente dar potranno pure anche una ſufficiente nozione per le teorie, ch' i tali due ricordati moti riguardano.

Sembrerebbe riſpetto alle matematiche dottrine in generale, che quanto v' ha per natura delle medeſime della difficoltà nell'intenderle, altrettanto dall'altra parte, vi uſaſſer chiarezza i Matematici nell'eſporle; ma per lo più a contrario ci ſuccede. O avvenga ciò per la moltiplicità delle relazioni, che le compongono, e però difficili a connetterle inſieme con la neceſſaria chiarezza; ovvero ch'aſſuefatti i medeſimi ad aver con i loro lunghi, e maturi raziocinii reſe a ſe ſteſſi chiare quelle verità, e quindi non riflettendo, che alla netta e facile idea da loro concepita, con troppa preciſione ſi ſpieghino, e dimoſtrino; o pure, il che però non credo, che vogliansi alcuni rendere alla poſterità miſterioſi, il fatto ſi è che da molti non poca noja s'apporta agli amatori di queſte facoltà, sì per le oſcure, ed intrigate dimoſtrazioni, sì per le nozioni, che, o bella poſta, o per accidente, ove d'uopo era annunziarle, ſon traſcurate, come ancora per gli oſcuri, e penoſi calcoli, con i quali ſon le medeſime maneggiate. Onde è, che per quanto ho potuto, ſtudiato mi ſono di non incontrare in cotali difficoltà, eſponendo primieramente ſotto degli occhi i principj con maniera ſpedita, e ſemplice, da coſe note le ignote inferendone, maneggiando

do le dimostrazioni con metodi semplici, e raziocinj ordinati, e connessi; e per quello ch' ai Calcoli appartiene, ho cercato senza oscurità maneggiarli, evitando nel tempo stesso la prolissità de' medesimi.

Finalmente reputo inutili quelle scuse, ch' alcuni Italiani scrittori mendicar sogliono, per avere eglino l' Opere loro nella Italiana, e non Latina favella scritte; posciachè al parer mio, stimerei d' aver maggiore, o almeno non minor ragione di doverle fare anzi, qualora in una lingua morta, e non nella vivente, e natia nostra avessi io scritto. Non è manchevole, al giudizio degli intendenti, l' Italiano idioma d' ogni espressione per qualunque arte, o scienza, quantunque alcuni poco maliziosi in questo diversamente la pensino, e specialmente, secondo essi, nelle presenti materie: sopra di che ho avuta più volte la pazienza io stesso sentirli sì malamente discorrere. E poi dall' altro canto non so perchè, conforme riflette il Viviani, addomesticar non debbasi per queste nascenti dottrine la nobilissima favella nostra, avvalorati maggiormente dal suo esempio, e da quello degli altri Autori sommi, il Galileo, il Magalotti, il Padre Grandi, il Manfredi, e molti altri, i quali oltracciò prestano altresì le frasi, ed i proprj termini per le materie; coll' autorità de' quali per conseguenza, non crederei potere esser tacciato d' inconsiderato chiunque, che di quei termini medesimi da loro usati, quantunque nel gran Vocabolario non registrati, ci si valesse; siccome in fatti di molti sparsi nell' Opera, colla di loro scorta, e sull' autorità delle Scuole è a me stesso addivenuto.

IN-

INDICE

DE' CAPI CONTENUTI NELL' OPERA

LIBRO PRIMO

Del Moto rettilineo.

PARTE PRIMA

PAR-

PARTE SECONDA

Del Moto rettilineo nel mezzo resistente.

LIBRO SECONDO

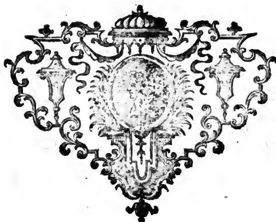
Del Moto Curvilineo.

PARTE PRIMA

PAR-

PARTE SECONDA

Del Moto Curvilineo nel mezzo resistente.



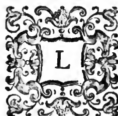
MEC-



MECCANICA SUBLIME *DIMOSTRATA* COLL' ALGEBRA.

LIBRO I.

Del Moto Rettilineo.



A Meccanica ſublime, della quale parlare intraprendo, ſi è quella tale Matematica ſcienza, in cui de' moti de' gravi, o corpi qualunque ragionaſi, indagandone de' medeſimi le proprietà, ed affezioni, col fiſſarne altresì le loro particolari teoriche, e leggi.

In due libri perciò ſarà la preſente opera diviſa; nel primo ſi eſaminerà il moto rettilineo, e nel ſecon-

do poi il curvilineo , tale essendo il metodo più naturale , e semplice , il quale generalmente da' meccanici, che di movimenti han parlato , sempre solito è stato di praticarsi .

Ciascheduno de' due predetti moti in particolare è stato considerato in varj aspetti , per le molte alterazioni , che , o da forze , o pure dalle circostanze , che l' accompagnano suol soffrire nell' ordine della natura . De' principali trattati , che portano alla conoscenza delle proprietà d' ambedue , come pure dell' applicazione delle loro annesse leggi sarà mio istituto il discorrerne ; e se ampiamente per la vastità della materia in se stessa , sopra di essi estendermi non mi sarà agevolmente permesso , però di quanto bastar può per fondamento, e per guida alla loro intelligenza, come altresì per conoscere il bello , e buono , che fino ad ora sopra ciò è stato da' sublimi ingegni lasciato scritto , mi sforzerò additarne chiari , e sufficienti principj .

In oltre si dividerà ciaschedun de' Libri in due parti ; nella prima si parlerà di quel tal moto prodotto nel vacuo , e nella seconda del medesimo , che nel pieno , o mezzo resistente, che dir si voglia, vien fatto.



PAR-

PARTE I.

Del Moto Rettilineo nel Vacuo.

DAlla ſteſſa denominazione s' intende, che coſa ſia il moto Rettilineo nel Vacuo, ed a volerlo ulteriormente ſpiegare ſarebbe un volerne piuttoſto confonder l' idea, che dichiararla. Da queſta prima Parte dipendono tutti i principj d' ogni ſpecie di moto, mentre dallo ſtabilimento di queſte Leggi, conforme vedremo, s' apre un vaſtiſſimo Campo per l' intiera, e perfetta nozione di queſta nobiliſſima Scienza.

Il Moto Rettilineo nel Vacuo non ſi può coſtantemente aſſerire ſe la Natura lo metta in pratica, o no nell' uſo delle funzioni ſue; artificioſamente, benchè non perfetto, è fuor di dubbio, ch' egli è fattibile, dimoſtrandocelo ogni ora le fiſiche eſperienze. E la Natura forſe con l' impercettibile arte propria a ſe ſteſſa farà altrettanto, non eſſendo ſcarſa nella varietà d' operazioni; che di eſiſtenza ſia capace, poichè chiara idea dell' eſſer poſſibile ſi concepiſce, mi ſembra indubitabile; onde qualora è tale, quantunque che in fatto, nè nell' una, nè nell' altra forma ſuccedeſſe, non produce, che non ſi poſſano ſtabilire le proprietà, ch' ad eſſo debbon competere, per applicarle poi, come in fatti ſi fa, a que' moti, che nel pieno ſono operati.

CAPITOLO I.

Del Moto in genere.

DEFINIZIONE I.

1. *Questo vastissimo spazio dell' Universo immobile, che comunemente Cielo s' appella, comecchè immenso, ed infinito creduto, ed a niun altro oggetto riferito, suol chiamarsi perciò Spazio assoluto.*

Si dice immobile, perchè dall'intelletto umano non è concepibile in esso mutazione di luogo, essendo, come si è detto, infinitamente esteso.

Suole questo però concepirsi diviso in parti in vigore di solo concetto matematico, benchè in fatti tale non sia, ad effetto di formarne più distinte, e precise l' idee.

Non potendosi adunque concepire, per rapporto ad esso Universo immobile, alcuna mutazione di luogo, ne verrà per conseguenza, che queste tali da noi concepite divise parti conserveranno costantemente fra loro la situazione stessa, in ogni tempo; cioè lo spazio assoluto sarà sempre simile, e perpetuamente l' istesso.

DEFINIZIONE II.

2. *Allorchè qualcheduna delle già ricordate parti di questo spazio viene da qualunque corpo occupata, il luogo dal corpo occupato si chiama luogo assoluto.*

DE-

DEFINIZIONE III.

3. *Spazio relativo si chiama quella dimensione, o tratto di luogo dello spazio assoluto, riferito da noi ad oggetti, o corpi qualunque.*

Differisce dall' assoluto, perchè quello a niun' oggetto si riferisce.

Perciò facendosi la relazione della nostra Terra al Sole, la distanza intermedia fra questi due Corpi si chiamerà spazio relativo. E tali sono tutti gli spazj, che nelle cose usuali nostre sogliono aver luogo; per cagion d' esempio, spazio d' Edifizio, di lunghezza ec., perchè, o alla Terra stessa, o ad altri corpi s' intendono riferiti.

DEFINIZIONE IV.

4. *Il luogo relativo sarà una parte dello spazio relativo; cioè una situazione del corpo, riferito alla situazion d' altri corpi.*

Concepita giustamente l' idea degli spazj, e de' luoghi, e della loro differenza, sarà facile capir con chiarezza l' indole delle due specie di moto, assoluto, e relativo, come pure le proprietà loro, che da alcuni confusamente si spiegano.

DEFINIZIONE V.

5. *Il moto generalmente preso si è quella traslazione d' un corpo fatta da luogo in luogo.*

Questa traslazione può essere in due maniere, e assoluta, e relativa, parlandosi della prima, si chiama moto

moto assoluto, e della seconda, moto relativo vien detto.

DEFINIZIONE VI.

6. *Onde il moto assoluto si è la traslazione d' un corpo da luogo assoluto, a luogo assoluto.*

Allorchè adunque si trasferisce il mobile da luogo in luogo in varie parti dell' Universo immobile, avrassi il moto dell' antecedente Definizione, il quale vien fatto senza aver altra relazione, ch' allo spazio già detto. Questa relazione son capaci d' averla tutti quanti i corpi in esso immersi, come, portando la considerazione alla Terra da noi abitata, e supponendola muoversi con una legge qualunque nel nominato spazio, al quale solo si faccia di tal moto la relazione, si dirà, che la Terra di moto assoluto si mova; che se a contrario, suppongasi immobile, e che i corpi in essa collocati si movano, intendendosi, ch' il moto loro al suddetto spazio si riferisca, questi tali corpi, in tal caso, saranno essi, che assolutamente si moveranno. Ed in tal forma si estenderà l' applicazione a' diversi moti d' ogni altro corpo; come supponendo che i Cieli si movano, seco trasportando i Pianeti fra loro in una quiete relativa esistenti, si moveranno i Cieli con i Pianeti insieme di moto assoluto, purchè si abbiano, e gli uni, e gli altri ad esso spazio con i loro moti riferiti.

DEFINIZIONE VII.

7. *Poichè il moto assoluto fu detto essere quella traslazione del corpo da luogo assoluto a luogo assoluto;*
così

così il moto relativo sarà la traslazione del corpo da luogo relativo, a luogo relativo.

Imperocchè quella mutazione di luogo fatta dal mobile per rapporto a qualsivoglia spazio relativo, verrà caratterizzata col nome del moto già detto. Se adunque dal Sole alla Terra si faccia relazione, la distanza fra questi due corpi frapposta sarà uno spazio relativo, ed uno rispetto all' altro sarà situato in luogo relativo, e perciò col supposto, che il Sole si aggiri ad essa intorno, il moto suo per conseguenza sarà moto relativo. Parimente prendendosi un qualunque spazio relativo, e sia la Terra stessa, ma supposta immobile, paragonati certi corpi a questo spazio terreno, se altrove saran trasferiti, si dirà, che questi si movan di moto relativo; e siccome di simili traslazioni infinite posson farsene, e perciò infiniti esser potranno i moti relativi, i quali effettivamente son quei, che giornalmente han luogo negli usi comuni di nostra vita.

Se questo nominato moto si faccia d' un corpo solo, si chiama allora moto relativo proprio; e se più saranno i corpi relativamente mossi, fra loro stessi supposti in quiete, si chiama questo, moto relativo comune. Perciò supponendo la Terra mobile, e che al Sole, a cui vien riferita si mova intorno, i corpi, che in quiete in essa dimorano, unitamente con lei di moto relativo comune si moveranno.

Un movimento qualunque in diverso aspetto considerato, può essere, e relativo, ed assoluto, dipendendo dalla relazione, che d' esso verrà fatta l' indole sua, e la natura. Se la Terra stia ferma, ed un corpo qualunque in essa si mova, quando un tal moto venga riferito all' immenso spazio dell' Universo, si moverà di moto assoluto, riferito poi alla Terra stessa, o ad altro og-

oggetto preſo a piacere , verrà ad eſſere allora il moto ſuo relativo . La Terra altresì , ſe mobile ſi ſupponga , e che allo ſpazio aſſoluto venga riferita , di moto aſſoluto parimente ſi dirà , che ſi mova ; ma ſe poi riferita ſia allo ſpazio relativo, cioè al corpo ſolare per eſempio, ſarà in queſto caſo, il moto ſuo relativo .

Diſtinguonſi i già due' mentovati moti , cioè l' aſſoluto , ed il relativo da notabiliſſime affezioni ; ſe verbi grazia il corpo ſia moſſo di moto aſſoluto, qualora da forze non venga neceſſitato , non ſi altererà in una benchè minima parte il moto ſuo , il che così non è del corpo relativamente moſſo , poichè ſenza aggiugnere ad eſſo nuove forze , o cagioni , può in tutto , e per tutto alterarſi dello ſteſſo moto la proprietà , e natura , per cagioni , o circoſtanze aggiunte all' altro corpo , a cui facevaſi la relazione . Così egualmente aggiunta nuova cauſa al corpo moſſo aſſolutamente , non potrà farſi a meno di non ſeguirne alterazione nel di lui moto ; ma a' corpi , che relativamente ſi muovono poſſonſi imprimere forze , e forze tali , e coſtituirli in sì varie , e diverſe circoſtanze, che ne' moti loro non ſi ſoffra la minima alterazione .

Fino ad ora non ſi hanno evidenti prove quali ſieno i moti aſſoluti , e quali i relativi , in particolare di ciaſchedun corpo moſſo per le leggi ſtabilite dalla Natura ; mentre movendoſi alcuni nell' immenſo ſpazio dell' Univerſo , dove da' ſenſi noſtri non ſono nell' eſſer loro intelligibili , il giudizio noſtro perciò non può diſtinguerli per la mera loro apparenza . Si vede per eſperienza , che , o ſia il Sole , o pur la Terra , certo è, ch' uno di queſti Globi nell' aſſoluto ſpazio ſi move , non ſi sa però con umana certezza a chi de' due attribuirne il movimento .

Dalla

Dalla descritta natura del moto assoluto, e relativo ne deriva la legittima intelligenza, qual sia la quiete assoluta, e quale la relativa, mentre la quiete niente altro è, che lo stato, o affezione del corpo al moto contraria.

DEFINIZIONE VIII.

8. *Onde la quiete assoluta verrà ad essere lo stato del corpo allorchè non è mosso assolutamente, cioè che dimora in riposo nello spazio, o in luogo assoluto.*

DEFINIZIONE IX.

9. *La Quiete relativa sarà poi quella permanenza del mobile nello stato contrario al moto relativo, vale a dire, quando ch' il corpo starà senza moto in uno spazio, e luogo relativo.*

DEFINIZIONE X.

10. *Se ci immagineremo una continua durazione, ch' equabilmente succeda, passando da momento in momento, ed a niuna cosa venendo riferita, tal durazione, e successione continua vien detta il tempo assoluto.*

DEFINIZIONE XI.

11. *Una comune misura da noi fatta in qualsivoglia specie di durazione, riferita a qualche cosa, come sarebbe l' Ore, gli Anni ec., si chiama tempo relativo.*

Dal moto si prende questa tal durata, ond' è che pro-

propriamente parlando, la misura del moto costituisce il tempo relativo.

Questo moto preso così per misura del tempo, si prende dal corso del Sole, o sia della Terra, in supposizion che si mova, o pure da altri celesti Corpi, come degli Antichi si dice molti aver fatto, o sia da altri moti qualunque, che superfluo sarebbe l'annoverarli.

Queste sono l'idee più generali, che concepir si debbono del moto, e delle circostanze, che l'accompagnano, si farà passaggio adesso a spiegar del medesimo altre particolari, e specifiche proprietà sue.

CAPITOLO II.

Del Moto equabile, o sia Uniforme.

12. QUalunque moto, che in natura succede, successivamente succede, cioè deve il mobile trapassare di punto in punto, e non di salto, nello scorrere il suo cammino. Supponendosi pertanto in viaggio, se altrimenti da quanto si asserisce accader dovesse, sarebbe necessario, ch'il corpo dal punto primo, che principia a scorrere, se ne trapassasse all'ultimo, o sia a qualunque altro, che non è dopo il primo, senza toccare, movendosi, gli altri punti intermedj. Per ciò succedere si dovrebbe annichilare nel passaggio de' frapposti punti, e poi di nuovo negli estremi riprodursi; il che essendo all'esperienza, ed alla ragione contrario, dunque ogni corpo nel moto suo dovrà passare per ogni minimo punto del suo viaggio, conforme si è detto.

13. Suole il moto poi secondo le affezioni, che prende caratterizzarsi di nomi diversi; come sarebbe, se

ſe equabilmente ſcorre, ſi chiama moto equabile, o uniforme, ſe ſi ritarda, ritardato, accelerato, ſe ſi accelera &c.

Dal moto equabile, ed accelerato, o ritardato ſe ne deducono le principali Teorìe per applicarle a qualunque altra ſpecie o natura di movimento; e perciò di queſti ſarem per trattare ſoltanto nel Libro preſente, riſparmiandoci pure di ſpiegare le denominazioni degli altri moti, mentre dal ſolo nome ſi fa nota la loro particolar proprietà.

DEFINIZIONE XII.

14. *Il moto equabile, o uniforme ſi chiama quello, nel quale in tempi eguali trapaſſa il mobile ſpazj eguali.*

DEFINIZIONE XIII.

15. *Quella Durazione, per la quale il corpo continua il moto ſuo, chiamaſi Tempo.*

E ſiccome num. 11. il tempo prende la ſua miſura dal moto, concependoſi, ch' un punto matematico equabilmente dal corpo ſi ſcorra, tutti gli ſcorſi punti formeranno una linea, e perciò ſi diſegna il tempo per quella linea deſcritta dal mobile, come miſura del moto.

La ſteſſa ſcorſa linea ſi può prendere ancora per lo ſpazio, ch' in certo tempo ſi ſcorre; e perciò

DEFINIZIONE XIV.

16. *Lo ſpazio altro non è, ch' un tal viaggio paſſato dal mobile in certo tempo.*

DEFINIZIONE XV.

17. *La velocità si chiama quella tale affezione del mobile, in vigor della quale, in certo tempo, trapassa un qualunque spazio.*

Per bene intendere il moto equabile coll' applicazione delle già spiegate proprietà, se ne farà l' Analisi, come siegue.

ESEMPIO.

Tav. I. Fig. 1. 18. Suppongasi un corpo costituito in *A*, al quale sia stata impressa una forza in una qualsivoglia maniera; fingasi di poi, che questa non operi più nè punto, nè poco, perchè, o venga dal corpo rimossa, o distrutta, comunque di supporre ci piaccia; non cagionando perciò nel mobile, per la privata energia, dopo la prima impressione, una benchè minima alterazione, necessariamente, perchè supponesi rimossa ancora qualunque esterna cagione, dovrà scorrere di moto equabile, o sia uniforme, che vuol dire, che manterrassi affetto sempre dalla velocità stessa; ed è per se chiaro, non essendovi cagione d' alterarsi il di lui moto. Così scorrendo con la velocità sempre stessa, non vi è maggior ragione, ch' in un tempo all' altro eguale trapassi spazio maggiore, e perciò in eguali tempi, come nella Definizione 12 si è detto, dovrà trapassare eguali spazj. Onde nella retta *AI*, supposta la direzione del mobile, prese l' eguali parti *AL*, *LG*, *GO*, *OI*, dinotanti i tempi eguali impiegati nel suo viaggio, ed in oltre ne' punti delle sezioni, innalzate le perpendicolari *AH*, *LQ*, *GM*, *ON*, *IK*, parimente fra loro egua-

eguali, che dinotino le velocità; i compiti paralellogrammi *AQ*, *LM*, *GN*, *OK* rappresenteranno i rispettivi spazj ne' tempi eguali trascorsi, per essere ciascuno d' essi fra loro eguali, per l' eguali basi, ed altezze.

COROLLARIO I.

19. Stando invariabili le velocità, si deduce, che gli spazj seguiranno la ragione de' tempi, cioè diminuendosi, o accrescendosi i tempi, egualmente gli spazj si diminuiranno, o accresceranno, per lo che in tempo doppio si scorrerà dal mobile doppio spazio, in triplo, triplo, e così in infinito.

COROLLARIO II.

20. De' respettivi spazj per i piccoli paralellogrammi considerati, o pure di tutti insieme presi nell' intiera Area *AK*, e così de' respettivi tempi, o di tutti insieme nella retta *AI* compresi, e della velocità invariabile *IK*, se ne forma un rapporto, o sia equazione fra loro; Imperocchè chiamato lo spazio $AK = s$, ed $IA = t$, ed $IK = u$, avrassi $s = ut$, mentre lo spazio *AK* così si misura, conforme dalla Geometria è manifesto; e sarà perciò lo spazio eguale al tempo nella velocità moltiplicato, come pure $u = \frac{s}{t}$, e $t = \frac{s}{u}$, dal qual semplice canone si stabiliscono i fondamenti primi di questa Scienza, conforme in fatti sarem per vedere.

COROLLARIO III.

21. Nella supposizione del moto stesso, ma di corpi

corpi diversi de' quali i moti loro si debbano paragonare, distinti i respettivi tempi di due mobili con le lettere T, e t, e gli spazj S, ed s, e le velocità con V, ed u, servendo le majuscole per uno, e le piccole per l'altro; qualora della medesima velocità sieno dotati, saranno i tempi fra loro come gli spazj, cioè $T : t :: S : s$

COROLLARIO IV.

22. Se le velocità sieno ineguali, ed eguali i tempi, avrannosi gli spazj in ragione della velocità, cioè $S : s :: V : u$

COROLLARIO V.

23. Se tanto i tempi, che le velocità sieno disuguali, staranno gli spazj in ragion composta delle velocità, e de' tempi, sicchè $S : s :: VT : ut$, e ridotta l'analogìa ad equazione, $Sut = sVT$; da dove ricavasi pure $T : t :: Su : sU$, cioè i tempi in raragion composta diretta degli spazj, e reciproca delle velocità; ed $V : u :: St : sT$, che saranno le velocità in ragion composta diretta degli spazj, e reciproca de' tempi.

SCOLIO.

24. Se un esattissimo moto equabile succeda, o no in natura, non fa al caso nostro l'investigare, atteso che quantunque effettivamente tal non si dia, le leggi, ch' in supporlo si stabiliscono sarebbero sempre vere, e verissime altresì le conseguenze, ed utilità, che

che dallo ſtabilimento loro derivano.

Se ſieno le ſole leggi meccaniche aſtrattivamente conſiderate, certo è, che realmente può darſi, ſe v. gr. ſi prenda il movimento d' un Orologio, ſe le forze motrici, che lo neceſſitano, e la perdita delle medeſime, compreſo ogni rapporto, che produrre, ed eſtinguer lo poſſono, ſi compenſaſſero, è fuor di dubbio, che avrebbeſi il moto perfettamente equabile, ma è più che vero altresì, che per ridurre alla pratica l' eſecuzione non ſarà una coſa delle più agevoli ad ottenerſi. Comunemente nella miſura del tempo uſato per i ſervigj del viver noſtro, o queſto venga diſtribuito in minuti, ore, anni &c. ſogliamo tale ſupporlo, mentre ci prevagliamo di queſto moto per determinarlo.

CAPITOLO III.

Del Moto uniformemente accelerato, e ritardato.

IL celebre Galileo, che ragionevolmente può dirſi il Padre di queſta Scienza, ſul fondamento, che la gravità ſia ſempre coſtante, cioè che nel proſeguimento del moto d' un corpo non muti mai di valore, appoggiato ſu la ragione, ed eſperienza ſtabilì del moto uniformemente accelerato la ſeguente Definizione.

DEFINIZIONE XVI.

25. *Il moto uniformemente accelerato ſi chiama quello, in cui partendo il mobile dalla quiete, in tempi eguali, ſi aumenta di velocità eguali.*

DE

DEFINIZIONE XVII.

Tav. I. Fig. 2. 26. *Il moto uniformemente ritardato ſi è quello, in cui per tempi eguali ſi diminuiſce il mobile di velocità eguali.*

Onde il ritardato nient' altro ſarà, che il contrario dell' accelerato, e però tutto ciò, che del primo ſi parlerà s' applicherà al ſecondo, come in fatti in più caſi vedremo.

La verità dell' antecedenti ſtabilite Leggi de' corpi accelerati, o ritardati chiaramente ſi vede, conſiderando, che eſercitando nel mobile la ſua energia la potenza continua, o gravità, o forza comunque piaccia di nominarla, e queſta ſempre la ſteſſa, cioè invariabile, la medeſima impreſſione, che nel mobile ha fatta nel primo momento di tempo, la farà ſenza dubbio nel ſecondo, al primo eguale, non eſſendovi maggior ragione di farla nè più, nè meno. Ne verrà adunque per legittima conſeguenza, che il corpo dovrà acquiſtare una velocità eguale a quella nel primo tempo acquiſtata, che viene a dire, che ſi aumenterà d' altra velocità eguale alla prima nel ſecondo tempo del ſuo cammino; non entrando adeſſo in quiſtione, ſe l' energia della forza s' eſerciti negli ſpazj, o ne' tempi, del che occorrerà nel ſeguente Capitolo parlarne.

Sono ſoliti i Meccanici di dividere il moto ineguale, o ſia queſto ritardato, o accelerato, in infiniti moti equabili, dividendo il tempo, e lo ſpazio in parti infinitamente piccole, le quali, così in iſpecie conſiderate può ſupporſi ſcorrerle il mobile equabilmente; come ſupponendo, che *AB* ſia un tempo minimo, benchè in queſto per impulſo della forza la velocità non ſi man-

mantenga sempre la stessa, tuttavia per essere infinitamente piccolo, può ragionevolmente prendersi, che scorso sia con celerità sempre eguale. Onde ne nascerà la considerazione, che nel principio del momento di tempo si prenderà il mobile come dotato della velocità, che nel fine del detto istante ritiene, cioè $AK = BD$, e ciò, che di questo si dice, si potrà applicare ad ogni altro, come dall' esempio seguente sarà manifesto.

E S E M P I O.

27. La retta *AI* venga disegnata per lo tempo, che dal mobile suppongasi scorrere, e questa in infinito si divida nelle particelle minime *AB*, *BE*, *EG*, *GI* rappresentanti i tempi infinitamente piccoli; dipoi innalzata *AK* perpendicolare ad *AI*, poichè l' istante *AB* si suppone, num. antecedente, scorrersi di moto equabile, e perciò la velocità sempre la stessa, potrà considerarsi adunque, che sia $AK = BD$ la velocità del corpo, nel momento di tempo *AB* acquistata. Nel secondo istante *BE*, al primo eguale, dovendosi aumentare di velocità eguale, Definizione 16, si prolunghi *BD* fino in *T* a segno che $DT = BD$; l' intiera *BT* composta della velocità del primo istante, e della *DT* del secondo, esprimerà tutta la velocità del mobile, con la quale di moto equabile trapasserà il tempo *BE*. Nel principio del terzo istante *EG*, si prolunghi *EF* fino in *C*, accresciuta della $FC = DT$; la composta *EC* sarà la velocità del corpo nell' altro piccolo tempo *EG*; Nel principio dell' istante *GI*, si accresca dell' $HM = FC$, e così replicando lo stesso discorso, si avrà finalmente l' intiero tempo *AI*, come pure la velocità del mobile acquistata nel punto *I*, per la retta *IL* dinotata; e perchè il rettangolo *IM* si

 è in-

è infinitamente piccolo, per rapporto a tutti gli altri antecedenti, infiniti di numero già ſuppoſti, e però potrà traſcurarſi; I triangoli eſterni poi *ADK*, *DFT*, *FHC*, *HLM* per eſſere di queſto ſteſſo la metà, con maggior ragione potrannoſi eſſi pure traſcurare, onde l'intiera Area del triangolo *AIL* ſarà figura dello ſpazio finito, che dal mobile vien deſcritto.

PROPOSIZIONE I.

Tav. I. Fig. 3. *Se dalla quiete parta un mobile con moto uniformemente accelerato, gli ſpazj paſſati in qualſivoglia tempo ſon fra di loro in ragion duplicata de' tempi.*

28. Dal punto *B*, dalla quiete, ſia partito adunque il mobile per la direzione *BI*, che ſi prenderà per lo ſcorſo tempo, e ſiano *BI*, e *BF* due reſpettivi finiti tempi, e le perpendicolari alla *BI*, e parallele fra loro *IV*, *FE* rappreſentino al ſolito le velocità del mobile ne' predetti tempi acquiſtate. Per eſſer poi i triangoli *BFE*, *BIV* ſimili, è noto, che ſtanno fra loro in ragion de' quadrati, o ſia in ragion duplicata de' lati omologhi *BF*, e *BI*; ſicchè nominati uno *S*, e l'altro *s* i triangoli detti, preſi per li reſpettivi trapaſſati ſpazj, *T*, e *t* per li tempi impiegati, avraſſi $S : s :: T^2 : t^2$, che è quanto doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

29. Sono parimente i già detti triangoli fra loro in ragion duplicata de' lati omologhi *FE*, ed *IU*, che rappreſentano le reſpettive acquiſtate velocità, le quali ſi chiamino ſimilmente *U*, ed *u*, corriſpondendoſi le majuſcole fra di loro, e le minori anch'eſſe; ſtarà perciò $S : s :: U^2 : u^2$, che

che vale a dire, gli ſpazj paſſati in ragion duplicata delle velocità.

COROLLARIO II.

30. La ſimiglianza de' triangoli ci dà pure, che $BF : FE :: BI : IU$; ed alternando $BF : BI :: FE : IU$; cioè $T : t :: U : u$, che ſaranno le velocità acquiſtate come i tempi ſcorſi, e perciò ne verrà per conſeguenza, che la velocità del tempo doppio ſarà doppia, del triplo, tripla &c.

COROLLARIO III.

31. Dovendoſi eſprimere il rapporto fra le proprietà, che nel moto accelerato convengono, le quali, conforme ſi è veduto, nel triangolo *BIU* vengon compreſe, prendendoſi per l' intiero tempo $BI = t$, e per la $IU = u$ le acquiſtate velocità, e l' area per lo ſpazio ſcorſo $= s$, ſi ha $2s = ut$; avvertendoſi, che parlando d' eguaglianza di quantità di queſta ſpecie, s' intende, ch' il loro aumento, o diminuzione ſi fa proporzionatamente, cioè, che ſono fra loro proporzionali in una coſtante ragione.

COROLLARIO IV.

32. L' equazione ricavata dalle proprietà del moto equabile, num. 20. fu $s = ut$, che perciò ſupponendo, che le ultime acquiſtate velocità, ed il tempo del corpo moſſo di moto accelerato ſieno le ſteſſe di quelle velocità, e tempo del mobile uniformemente moſſo, avraſſi, che lo ſpazio del moto equabile è doppio del-

C 2 lo

lo spazio dell' accelerato, poichè, Coroll. antecedente, vi vuol doppio spazio di moto accelerato, con le supposte istesse velocità, e tempi.

COROLLARIO V.

33. Prendendosi dal principio del moto tanti tempi eguali, principiando dal primo istante, e sieno $BF = FK = KI$, gli spazj passati saran fra loro come i numeri, chiamati impari, principiando dall' unità, cioè come 1, 3, 5, 7, e così seguitando.

Imperocchè essendo *BF*, *BK*, *BI* come 1, 2, 3, 4 &c., e gli spazj stando fra loro, numero 28. in ragion duplicata de' tempi, cioè al caso presente, lo spazio *BFE* sarà come il quadrato dell' unità, primo tempo = 1, lo spazio *BKS* come il quadrato del secondo tempo = 4, e lo spazio *BIU* come il quadrato del terzo = 9, e così l' altro = 16; onde nel tempo 1 sarà lo spazio come 1, nel tempo 2 sarà come 3, perchè si deve sottrarre da questo lo spazio 1 passato nel primo tempo, nel tempo 3 sarà come 5, perchè si deve sottrarre lo spazio 1 passato nel primo tempo, e lo spazio 3 passato nel secondo; così dello spazio 16 resterà 7, detratto 5 + 3 + 1, che è quanto a dire, che staranno in ragion de' numeri 1, 5, 7, 9 ec. nominati impari, secondo il sopra enunciato.

COROLLARIO VI.

Tav. I. Fig. 4. 34. Quella retta linea, che vale per disegnare i tempi, al num. 15. si è detto, che può egualmente prendersi per lo spazio dal mobile trapassato in certo tempo; or dunque supposta questa *AT*, e gli spazj scorsi

ſcorſi in due diverſi tempi ſieno *AS*, ed *AT*, e le velocità acquiſtate, come al ſolito, vengano rappreſentate per le parallele *SL*, e *TK*, poichè, num. 29. gli ſpazj paſſati ſtanno in ragion duplicata delle velocità, dovranno eſſere adunque $AS : AT :: \overline{SL}^2 : \overline{TK}^2$, notiſſima proprietà della Parabola Apolloniana; e perciò ſiccome il triangolo ſopra deſcritto, preſa la direzione del mobile per li tempi, vien chiamato da alcuni la ſcala delle velocità, così prendendoſi per gli ſpazj, ſoglion chiamar la parabola ancora con queſto nome.

COROLLARIO VII.

35. Le ſteſſe ragioni ſopra accennate, per le quali ſi deve accreſcere al mobile le velocità, vagliono in ragion contraria nel ritardato. Per lo che ſuppoſto il corpo in *I*, con la medeſima velocità nell' accelerato acquiſtata $= IL$, ſi ſupponga reſpinto per la medeſima altezza *IA*, rappreſentante i tempi, le parallele *GH*, *EF*, *BD* ſaran figura delle diminuite velocità, ed il medeſimo Triangolo *ILA* rappreſenterà ſimilmente lo ſpazio; ſicchè vedeſi chiaramente, che le leggi indicate dell' accelerato avran luogo nel ritardato, con la ſola iſpezione, che in vece di velocità accreſciute, ſaranno diminuite, e perciò l' equazione $2s = -ut$ eſprimerà l'affezioni di queſto ritardato movimento. Tav. I. Fig. 2.

COROLLARIO VIII.

36. Per averſi riſoluto il moto accelerato, e ritardato in infiniti moti equabili, ſe ne ricava, che la relazione delle quantità nel moto uniforme, cioè $s = ut$

ut num. 20. ſtabilita, potraſſi applicare agevolmente a queſti moti ineguali già detti, qualora ſi prenda, che il moto ſi faccia per un tempo infinitamente piccolo, che vale a dire, di doverſi prendere le differenze de' tempi, e degli ſpazj, laſciando come coſtanti le velocità, per le ragioni al num. 26. additate; e perciò $ds = udt$ ſarà la formula d'applicarſi nell'accelerato, e ritardato, da cui ricavaſi $u = \frac{ds}{dt}$, e $dt = \frac{ds}{u}$, cioè nel primo caſo, gli ſpazj infinitamente piccoli ſtanno in ragion compoſta de' piccoli tempi, e delle velocità, nel ſecondo, le velocità in ragion diretta degli ſpazietti, e reciproca de' tempi, e nel terzo i tempi in ragion diretta degli ſpazj, e reciproca delle velocità, formula, che ſerve di gran fondamento nelle ricerche meccaniche, conforme ſi vedrà dentro l' Opera in pratica per gli eſempj.

CAPITOLO IV.

Delle Forze, o Potenze, e della loro applicazione ne' movimenti.

37. FIno ad ora ſi è trattato del moto, e delle proprietà ſue, ſu la ſuppoſizione del Galileo, che la potenza di gravità applicata al corpo non variaſſe nel proſeguimento del moto, onde giuſtamente come coſtante non potendo alterare la relazione, era ſuperfluo l' introdurla nelle preſate ſtabilite leggi de' movimenti. Ma per le ſcoperte dopo d' eſſo fatte, ſi è dubitato, e forſe con ragione, della certezza dell'ammeſſo Principio. Per lo che quaſi tutti i Filoſofi, e Matematici credono a' tempi noſtri, che la forza di gravità creſca, o di-

diminuisca secondo il variare del luogo, cioè secondo la lontananza dal centro del moto, o delle forze, come altri dicono, a cui viene ad esser diretta.

Trattandosi di moti rettilinei fatti sopra la Terra a nostra veduta, certo è, che quantunque fosse questa variabile non potrebbe apportare una sensibile mutazione, per la sproporzione, che hanno tali moti, attesa la loro poca distanza, a tutto il Semidiametro della Terra, che è la lontananza dal centro comune alla superficie, al qual centro i gravi tutti sono diretti; e perciò in questi suol sempre come costante considerarsi.

Ma trattandosi poi de' movimenti di Corpi celesti, che a lontanissime distanze dal loro comune centro, qualunque prendasi, vengono operati, sarà allora molto sensibile la variazione di quella tal forza, che al detto centro gli spinge, e perciò il raziocinio del Galileo num. 26. in questo caso, non sarà appoggiato in un giusto principio, da esso come tale creduto, ond'è, che parlandosi dell' accelerazione de' gravi, gli aumenti dell' acquistata velocità non saranno più in tempi eguali, eguali fra loro, secondo la sua dedotta illazione, ma bensì avranno con la più, e meno forza la loro proporzione, atteso che maggiore, o minore potenza deve contribuire maggiore, o minore energia, o sia produrre maggiore, o minore azione nel mobile; e però ancorchè i tempi fossero eguali non sarà vero, che le velocità uniformemente s' accrescano.

Non ostante che così discorrendola, le velocità non s' accrescano nella detta ragione di eguali tempi, però le stabilite leggi dal Galileo de' mobili cadenti, o variabile, o costante che sia la gravità, avranno luogo in tutte le ricerche meccaniche, per l' uso, e maniera, che vengono applicate, conforme a suo luogo tal verità scorgeremo. Do-

Dovendosi perciò aver riguardo alla variazione della gravità, o forza, che nella produzione del moto si è l'unica cagione, e per abbracciare altresì tutti i sistemi de' moderni meccanici, dove grande uso si fa delle forze, e delle loro ragioni, sarà necessario applicarla essa pure nelle Teoriche antecedenti stabilite del moto, con quei rapporti, che ad essa competono.

DEFINIZIONE XVIII.

38. *La Potenza generalmente presa si è una forza, la quale, o dalla quiete conduce il mobile al moto, o dal moto alla quiete, o pure che in una qualsisia maniera altera il suo movimento.*

39. Così adunque nel numero delle potenze, o forze entra tutto ciò, che è capace d' alterare in qualsivoglia maniera il moto de' corpi. Sicchè la Gravità per la prima, l' Elasticità, la virtù Magnetica, Tenacità di materia, Resistenza di mezzo entrano tutte nella categoria delle potenze, o forze, poichè son abili, come vedesi, alcune, e dalla quiete movere il grave, e d' alterare insieme, ed altre d' alterare soltanto in qualche modo, o forma i movimenti. Della causa di queste forze i Meccanici non si prendon gran pena di ricercare, perchè riguardando al solo effetto ne' moti prodotto, la loro sola premura si estende di assegnarne le leggi, per l' azione da queste esercitata.

40. L' incomparabile Leibnizio a qualunque potenza, o forza, che da ostacolo fosse impedita, non entrando per conseguenza in esercizio, e così non capace di produrre alcuna mutazione nello stato del mobile, le diè il nome di forza morta; messa poi questa in azione, cioè congiunta col moto, e producendo conseguentemente effetto col fare alterare lo stato del mobile,

bile; la chiamò allora forza viva. Onde portando la considerazione alla gravità, qualora stia un corpo in quiete, impedito da una qualsivoglia cagione, quella pressione, o impulso, che fa gravitando, quella stessa sarà la forza morta, entrando poi in azione, rimosso l' ostacolo, verrà ad essere la forza viva accennata.

Da alcuni è stata creduta inutile una tal distinzione, ma a mio credere, male a proposito, perchè certo è, che il corpo essendo mosso s' veste d' affezione diversa, d' allorchè in quiete rimane, onde considerandolo in diverso aspetto ci sarà almeno conoscere con maggior chiarezza le proprietà, ch' in questi diversi stati gli competono, conforme per rapporto alle sue forze, dal prefato Leibnizio, e da altri in seguito dopo di esso, si crede, movendosi, altre realmente competerli. Avendo adunque, dopo un maturo esame, riconosciute esser queste predette due forze di diverso genere, cosa, che per l' avanti non era stata ben distinta, si lusingò, che la celebre quistione tra Meccanici, se le forze sien proporzionali alla massa moltiplicata nelle semplici velocità, o pure al quadrato delle medesime; fosse con tal distinzione decisa; poichè parlandosi della forza morta, diceva esser vero, che alle semplici velocità, ma che della viva fosse al quadrato di esse proporzionale. Però quantunque da molti sia il suo sentimento abbracciato, tuttavia segue fra i Cartesiani, ed i Leibniziani a dibattersi tal quistione; del merito della quale, dopo le seguenti Proposizioni se ne farà di passaggio menzione, almeno per rendere informato a sufficienza il Lettore d'un articolo, che ha meritata l'attenzione de' più rinomati moderni meccanici.

41. Per procedere con ogni chiarezza riguardante le Teoriche da trattarsi nell'Opera, come altresì per l'in-

D tel-

telligenza delle espressioni da' Meccanici praticate, le quali nella lettura de' Libri loro potrebbero apportar confusione, è da avvertirsi, che quella tale quantità da intromettersi nell' equazione, indicante la potenza, o forza produttrice del moto, vorrà rappresentare, o indicare quella forza chiamata morta, la viva restando computata, subito che questa morta a qualche affezione del moto viene congiunta, come nello spazio, o nel tempo vien praticato moltiplicarla, ciò ch' in fatto vedremo. E poichè le illazioni delle forze fra loro si deducono dalla natura de' movimenti effettivamente fatti, o tali supposti; ammessa adunque la distinzione del Leibnizio, sarà sempre vero, che questi tali rapporti caderanno sopra le forze vive accennate, cioè sopra l' azione dalle forze morte prodotta. Che se in ispecie occorrerà della sola pressione, o forza morta far parola, dal contesto del discorso medesimo, o pure individualmente verrà nominata.

Fra le potenze, che producono il moto, quella tale, che contribuisce una tendenza al corpo verso la Terra, cioè la Gravità, si è la più generale, su la quale cadono le considerazioni de' movimenti, e perciò dell' applicazione di questa nelle loro affezioni adesso verrò a parlare, considerandola come sopra la superficie della Terra, cioè costante; dipoi si applicheranno ne' già detti moti altre potenze, come l' Elasticità, la Viscosità della materia, la Resistenza, le quali tutte come forze, num. 39. son prese.

PROPOSIZIONE II.

Tav. 1. Fig. 3. *Partendo dalla quiete, e dal punto B il mobile con la gravità sempre costante, e l' altezza BI si prenda per*

li

li tempi impiegati nel ſuo cammino, le forze ſtaranno in ragion delle ſemplici acquiſtate velocità.

42. Eſſendo la gravità coſtante, il triangolo *BIV* ci ſpiegherà le proprietà, ch' al moto convengono, per quel che fu ſopra al num. 27. notato. La potenza di gravità, che neceſſita il corpo all' attual movimento, eſerciterà le ſue preſſioni, impulſi, o energia, comunque voglianſi nominare, più, e meno, ſecondo che più, e meno di tempo il mobile ſta in cammino; Sicchè prendendoſi tre uguali tempi *BF*, *FK*, *KI* finiti, o infinitamente piccoli, ſe così piaccia, nel primo *BF* corriſponderà un impulſo, o preſſione della medeſima; nel ſecondo *FK* al primo eguale, non vi è ragione, che debba eſercitare maggiore energia di quella del tempo primo, e così avrà impreſſa nel corpo un altro grado di forza viva, eguale alla prima; nel terzo *KI* ſeguirà lo ſteſſo; dunque, a norma degli ſcorſi tempi, ſarà dotato il mobile di forza impreſſa. Che ſe i tempi non ſi prendeſſero eguali, non oſtante ſarà ſempre vero, che gli impulſi ſaranno alla loro durata proporzionali; ma i tempi ſtanno come le velocità ſemplicemente preſe, num. 30. dunque anche le forze impreſſe proporzionali alle ſemplici velocità; ch'è quanto doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

43. Valendoſi perciò dell' eſpreſſione analitica, ſuppoſti due tempi qualunque, in uno de' quali la forza ſia $= F$, e nell' altro $= f$; ſtarà $F : f :: T : t :: V : u$.

COROLLARIO II.

44. Applicandosi la potenza di gravità nel tempo, con l'azione sua produce nel mobile la velocità, e più, e meno l'accelera, se più, o meno vi sta applicata; dunque la giusta relazione fra le passioni del moto sarà della forza nel tempo, come per uno de' termini della proporzione, e delle velocità, per l'altro. Però s'intenda che f sia = alla forza di gravità, ed un qualunque tempo finito = t, e la velocità parimente = u, si produrrà la formula $ft = u$; e se il mobile si ritarda, per lo scemamento delle velocità, sarà $ft = -u$; che saranno l'espressioni per la natura dell'antecedente moto.

COROLLARIO III.

45. In altra forma si ritroverà la già espressa precedente formula. Poichè dal Coroll. I. sta $T : t :: V : u$, cioè $\frac{u}{t} = \frac{U}{T}$, verrà con ciò ad intendersi, che in un caso viene affetto il grave dalla velocità, di cui è dotato, divisa pel tempo, come nell'altro dall'altra celerità pure per quel suo tempo divisa; sta eziandio nel citato Coroll. $F : f :: U : u$, o sia la forza d'un caso, a quella dell'altro, come la velocità alla velocità dell'altro, e surrogandovi quella affetta dal tempo, diviene $F : f :: \frac{U}{T} : \frac{u}{t}$, cioè $FTu = ftU$, vale a dire $ft = u$, ed $FT = U$, posciachè poste le due ricavate espressioni in analogia, ambedue la sola equazione a formar vengono.

CO-

COROLLARIO IV.

46. Prendendosi poi i tempi infinitamente piccoli, col differenziare avrassi, perchè f è costante, $fdt = du$, ed $fdt = - du$; che saran le formule stabilite in questa supposizion di moto, da dove parimente ricavasi, che l'accrescimento, o sia la diminuzion de' tempi, che si è lo stesso, sta come quello delle velocità.

SCOLIO.

47. Se così effettivamente sia, che i tempi crescano come le velocità, è stata gran quistione fra Meccanici, e fin da' tempi del Galileo, il quale poi riducendo all' assurdo l' opinione di quei, che volevano, che le velocità crescessero come gli spazj, fu totalmente una tal disputa abbandonata. Per farne vedere dalle fissate formule una tale assurdità, si supponga esser così in effettto, che le velocità seguano la ragione degli spazj, onde $s = u$, e $ds = du$, e perciò $\frac{ds}{s} = \frac{du}{u}$, ed integrando $ls = lu + lA$, Per determinar la costante, fattosi $s = o$, vien pure $u = o$, così che $lA = lo$, e sostituendo, $ls = lo$, ed $s = o$; si prenda la formula $dt = \frac{ds}{u}$ del moto equabile, ed a questo moto accelerato applicata, sarà integrando, $t = \int \frac{ds}{s}$, e sostituendo il valore de' ritrovati spazj, sarebbe $t = \int \frac{ds}{o} = \infty$, cioè il tempo sarebbe infinito, vale a dire, che il grave non si moverebbe mai dal punto B, onde impossibile il movimento.

Quan.

Quando occorrerà trattare i Problemi converſi delle date velocità in queſta prima parte, in altra forma verrà dimoſtrata l'impoſſibilità di tal ſuppoſto predetto moto, ed oltre a ciò ſi farà ivi vedere, che le velocità non ſolamente non poſſono aver proporzione con gli ſcorſi ſpazj ſemplicemente preſi, ma di più eziandio, ch'ogni altra poſizione, fuorchè quella delle predette già ſopra fiſſata, della ragion loro con la ſudduplicata de' medeſimi, riduce ſempre ad eſsere impoſſibile il movimento. Di più anche ſarà da me dimoſtrato, ch'i trapaſſati tempi altra ragione, che quella dal Galileo ſtabilita, d'eſſere alle ſemplici celerità proporzionali, non poſſono avere in natura, quando che le ſue ſuppoſizioni di forza coſtante, e ch'il cammino dalla quiete principj ſtabilmente perſiſtano.

PROPOSIZIONE III.

Tav. 1. Fig. 4. *Partendoſi un mobile dalla quiete con gravità coſtante, e nell' altezza AT ſi prendan gli ſpazj ſcorſi, le forze ſtaranno in ragion duplicata delle velocità acquiſtate.*

48. Sia perciò l'altezza *AT* diviſa in tre eguali ſpazj, o finiti, o infinitamente piccoli *AS*, *SC*, *CT*; nel punto *A* dalla quiete partendo il mobile, nell' avere ſcorſo lo ſpazietto *AS*, la gravità coſtante con la ſua preſſione avrà contribuita forza viva al mobile, e tanta, quanti ſi ſuppongono i ſuoi replicati impulſi. Nel trapaſſare il ſecondo ſpazio *SC* avrà ſucceſſivamente trasfuſali altra egual forza, e dopo il terzo *CT* ſuccederà l'iſteſſo, e così diſcorrendola con qualunque altro ſpazio; perciò quanti ſpazj ſaranno ſcorſi, altrettanti gradi di forza ſaranno al mobile comunicati; ma gli ſpazj ſtanno come i quadrati delle velocità num. 29. dun-

dunque le forze come i quadrati delle acquiſtate velocità; ciò, che doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

49. Si prendano adunque due reſpettivi ſpazj, e le forze al ſolito, ſarà $F : f :: S : s :: U^2 \; u^2$; ſecondo l'antecedente dimoſtrazione.

COROLLARIO II.

50. Avendoſi $ft = u$ num. 44. come pure num. 31. $2s = ut$, e num. 35. $2s = -ut$, ſoſtituendo in luogo di t, viene $2fs = uu$, e $-uu = 2fs$, come ſopra, le forze al quadrato delle velocità proporzionali riſultano, intendendoſi ſempre ch'il ſegno meno per lo ritardato abbia luogo.

COROLLARIO III.

51. Col prendere gli elementi del moto, l'antecedenti equazioni verranno $fds = udu$, ed $fds = -udu$, onde le formule dell'antecedente num. e queſte ſaran quelle, ch'alla predetta ipoteſi convengono, le prime per li finiti, e le preſenti per gli elementari ſpazj.

COROLLARIO IV.

52. Ciò ſi ricava egualmente prendendoſi al num. 46. $fdt = du$, $fdt = -du$, e $dt = \frac{ds}{u}$ num. 36., ſoſtituendo in luogo di dt, viene pure $fds = udu$, ed $fds = -udu$

CO-

COROLLARIO V.

53. Per essere $2s = ut$, surrogando dalla formula $ft = u$ le velocità, si riduce $s = \frac{ftt}{2}$, cioè gli spazj passati in ragion composta de' quadrati de' tempi, e delle forze.

SCOLIO I.

54. Premesse le due antecedenti Proposizioni, sarà facile adesso ben comprendere la celebre Disputa fra i Cartesiani, ed i Leibniziani, sopra accennata, cioè le forze in qual ragione stieno colle velocità. Egli è certissimo dalla Propo. 2., che riferendo le forze impresse ai tempi impiegati dal mobile, che tanto è che il dire, se il numero degli impulsi dalla gravità esercitati seguiti la ragione de' tempi, è indubitabile dico, che le forze sono alle semplici velocità proporzionali. E altrettanto certo poi dalla Propo. 3, che riferendosi gli impulsi, o sia la forza viva agli scorsi spazj, saranno allora al quadrato delle medesime proporzionali. Dunque ambedue le asserzioni sono verissime, e ciò non cade in quistione. Quel che si cerca soltanto è nel vedere, di quale effettivamente la Natura, ne' moti de' gravi si prevaglia di questi due fissati rapporti. Forse vorrà favorire il sentimento de' Leibniziani, non volendo, ch' il tempo entri allorchè si tratta dell' esercizio delle sue forze, riserbandolo per la sola misura della durata di questo. Per penetrare ne' suoi pensieri, si è cercato, ed ancora si cerca per la strada dell' esperienza, e sonosi tentati quasi un' infinità di

di ſperimenti da ambedue i Partiti : ma ſe ce ne ſtiamo al celebre Padre Riccati , che per la validità delle ſue ragioni merita ogni credenza, ne' Dialoghi delle ſorze vive ha concludentemente fatto vedere , che ognun di loro , nel voler dedurre dalle eſperienze le leggi da eſſa tenute , ſupponevano prima ciò , che era in quiſtione ; onde biſognerà dire , che ancor non ſi è degnata di farci conoſcere il voler ſuo, con evidenza almeno, traſcuraggine , che produrrà forſe ancora nuovi litigj all' anguſtiata umanità . Il citato Padre però , per ragioni molto probabili , e nel predetto Libro riportate , inclina a credere , che per lo partito Leibniziano ſia molto propenſa , ſcegliendo lo ſpazio per applicarvi le forze ſue .

55. Per accennar brevemente le ragioni, che ciaſcheduno a ſuo favore riporta. I Carteſiani tengono per veriſimile il raziocinio della produzione del moto, fatto alla Propoſizione 2. Poichè qual coſa è più naturale , dicono eſſi , che ad un iſtante di tempo *BF* corriſponda un impulſo della gravità , cioè un' azione producente un grado di velocità ? E di poi preſo l' altro eguale iſtante *FK* , è altresì naturaliſſimo , che a queſto pure corriſponda un altro impulſo , che abbia di nuovo prodotta la ſteſſa velocità del primo iſtante . Nel terzo tempo *KI* ſi dica egualmente dell' altro impulſo ; a ſegno che ne naſcerà la legge , che l' azione finita , o ſia il numero degli impulſi, o forza, come dir ſi voglia , abbia la ſua proporzione con tutto il tempo finito *BI* ; ma queſto è proporzionale alle ſemplici velocità num. 30 , dunque per eguaglianza di ragione la forza alle ſemplici velocità proporzionale ſarà anch' eſſa.

Dall' altro canto i Leibniziani così la diſcorrono, rappreſentando lo ſteſſo triangolo le paſſioni del moto

de' gravi cadenti, dopo d' aver trapaſſato il mobile il primo iſtante *BF*, è naturaliſſimo, che la gravità con i ſuoi impulſi abbia prodotta un' azione eſpreſſa per la retta *FE*; dopo il ſecondo iſtante *FK* replicando altro impulſo, è altresì ſimile al vero, che abbiaſi altra azione per la parallela *KS* rappreſentata; così dopo il terzo *KI* corriſponderà l' altra azione IV. Onde l' intiera azione finita, prodotta nel tempo BI finito, verrà diſegnata per la compiuta, e finita ſuperficie *BIU;* ma a tale azione deve eſſer proporzionale la forza impreſſa, e la ſuperficie *BIV* ſi è lo ſpazio ſcorſo dal mobile, num. 31. dunque la forza proporzionale a tale ſpazio; gli ſpazj ſtanno come i quadrati delle velocità num. 29. dunque la forza impreſſa come i quadrati delle velocità riſultar deve.

56. La concluſione adunque ſi è, come ſi oſſerva, che gli uni riferiſcono la forza, o ſia gli impulſi della gravità a' trapaſſati tempi, e gli altri agli ſpazj. Onde è, che nella ſuppoſizione de' primi, ſarà veriſſimo ciò, che eſſi dicono, che è quel tanto ricavatoſi da me al num. 44. che $ft = u$; e ſarà altrettanto vero nella ſuppoſizion de' ſecondi ciò, che ſi ſtabilì al num. 50, che ſia $2fs = uu$; e preſi gli elementi del moto $fdt = du$, ed $fds = udu$, avendoſi il ſolito riguardo per lo ritardato, delle velocità negative, ſopra accennato.

Queſte perciò ſaranno le formole, che mi guideranno alle ricerche da farſi, le quali per renderle eſteſe ad ogni ſuppoſizion da' Meccanici introdotta, vi ſi aggiungeranno le Maſſe de' corpi, applicandole nella maniera, che fra poco vedraſſi.

SCO-

SCOLIO II.

57. L' aggregato di tutte le particelle, o fia la quantità della materia d'un corpo qualunque, fuol chiamarfi comunemente la Maffa, la quale farà in feguito = M. Quefta univerfalmente da' Matematici tutti vien creduta proporziole al pefo del corpo fteffo, guidati dalla ragione, e dall' efperienza; ficchè effendo in libertà noftra di potere avere de' corpi quefto tal pefo, avraffi per confeguenza la mifura della quantità della materia, cioè della medefima gravità, o forza morta, o potenza affoluta, o in altra forma, che piaccia denominarla.

58. A quefta tal quantità di materia, o fia Maffa, è parimente proporzionale quella forza, che oggidì vien detta forza d' Inerzia, la quale in altro linguaggio la chiamò il Newton ne' fuoi principj di matematica forza infita. Onde è, che dalla introduzion della Maffa nelle Teorie del moto, verrà ad averfi la mifura della già detta forza; una delle cagioni effettivamente, per cui i Meccanici l' introduffero.

DEFINIZIONE XIX.

59. *La forza d' Inerzia poi fi è quella tal proprietà aderente a' corpi, in vigor della quale tendono a conſervarfi nel loro ftato.*

Dunque fe il corpo fia in moto, quefta facoltà di farlo continuare nel fuo ftato, chiamata forza d' Inerzia, conforme fi è detto, farà sì, che direttamente continui il fuo cammino; e fe viceverfa ritrovafi in quiete, non permetterà che fi mova, fe non vi fia tanto per l'uno, che

per l' altro ſtato, una cagione proporzionale per la di lui mutazione. Per lo che eſſendo maggiore, o minore la quantità della materia, è per ſe manifeſto, che maggiore, o minore reſiſtenza ſoffrirà il mobile per mutarſi da quella ſua tale permanente affezione; ſicchè, come poco fa ſi diſſe, dovrà eſſere una tal forza alla Maſſa, o quantità di materia proporzionale.

Che tal potenza di reſiſtere a moverſi il corpo allorchè ſta in quiete, ed a contrario di quando è in moto di far reſiſtenza per non ridurſi alla quiete, vi ſia effettivamente in natura, non è fatto da dubitarſi, mentre coſta da infinità di eſperimenti da' Fiſici, e Meccanici comprovati. E giuſtamente per eſſere una tal forza, che non ha neſſuna tendenza al moto, ma conſiſtente ſoltanto in una reſiſtenza, prima del Keplero le ſi dava il nome di forza paſſiva, a diſtinzion dell' attiva, cioè di quella ſtimolante al moto, come la morta, e la viva ſopra accennate.

S C O L I O I.

60. Conſiderandoſi diviſa in parti infinitamente piccole dello ſteſſo ordine, o ſia ne' primi elementi la quantità della materia di un corpo qualunque ſia, ci dimoſtra la ragione, che ognun di loro debba ricevere dalla gravità impulſi, o preſſioni eguali per iſpingerli al moto; dunque queſta potenza di gravità ſarà alla maſſa ſteſſa proporzionale. Suppoſti perciò affetti dal moto due corpi, uno A, e l' altro a, e la quantità della materia chiamata come ſopra M, ed m, F, ed f le forze, T, e t i tempi, V, ed u le velocità, le riſpettive maggiori lettere per uno d' eſſi A valendo, e l' altre per l' altro a, ſi avrà, in ſequela di quanto ſi dice

dice $F : f :: M : m$, ed $f = \frac{Fm}{M}$; cioè il corpo a farà dotato della forza f, come A di quella di $\frac{Fm}{M}$; ma al num. 44. la forza nel tempo è uguale alla velocità, ficchè per l'espreffione del moto del corpo a avrassi $ft = u$, e per l'altro A, $\frac{FmT}{M} = V$; e posti i termini in analogia, starà $\frac{ft}{m} : \frac{FT}{M} :: u : V$; o pure che è lo fteffo, $ft = mu$, ed $FT = MV$.

COROLLARIO I.

61. Se in vece de' tempi fi affumano gli Spazj S, ed s, feguitando il raziocinio medefimo, per l'uno a fi avrà come al num. 50. $fs = \frac{u^2}{2}$, e per l'altro A, $\frac{FSm}{M} = \frac{V^2}{2}$, da dove ne rifulterà $\frac{2fs}{m} = u^2$, e $\frac{2FS}{M} = V^2$; cioè $2fs = mu^2$, e $2FS = MV^2$.

COROLLARIO II.

62. Dunque avendo riguardo al moto di un fol corpo, e riferendo la forza al tempo, faranno efpreffi tutti i rapporti per la formola $ft = mu$, e riferita allo fpazio, per l'altra $2fs = mu^2$, e nel ritardato $ft = -mu$, e $2fs = -mu^2$.

COROLLARIO III.

63. Prefe ambedue le precedenti equazioni, ed il valo-

valore della velocità dell' una, e ſia quella, dove avvi la relazione del tempo, cioè $f^2 t^2 = m^2 u^2$, ſoſtituito in quella dello ſpazio, ſe ne deduce, che $\frac{2fs}{m} = \frac{f^2 t^2}{m^2}$ o ſia $s = \frac{ft^2}{2m}$, eſpreſſione indicante i tempi relativi alle forze, con gli ſpazj proporzionali.

COROLLARIO IV.

64. La quantità della materia, cioè la Maſſa moltiplicata nella velocità, ſuole ancora chiamarſi la quantità del movimento, la quale vien miſurata, conforme ſi oſſerva, dalla formula $f.t = m u$, dalla forza applicata nel tempo.

COROLLARIO V.

65. Le anzi dette ſtabilite formule $f t = m u$, e $2fs = m u^2$ ſi ricavano in conſeguenza dell' ipoteſi della gravità coſtante, potenza per ora, fin quì preſa a conſiderare; ma per le rifleſſioni del num. 37. non ſarebber queſte le leggi del moto accelerato, qualora foſſe queſta variabile.

COROLLARIO VI.

66. Per ampliarle però ad ogni caſo, ſuppongaſi, che il moto ſi faccia per un elemento del tempo, o dello ſpazio, quantunque in queſto la gravità non ſia coſtante, conſiderataſi applicata in una sì piccola particella, ſarà tanto poca la ſua variazione, che potrà traſcurarſi, e perciò col differenziare le predette eſpreſſioni ſi ren.

ſi renderanno generali in ogni ſuppoſto di variabilità, o coſtanza di forze; per lo che $f\,d\,t = m\,d\,u$, ed $f\,d\,t = -\,m\,d\,u$, $f\,d\,s = m\,u\,d\,u$, così $f\,d\,s = -\,m\,u\,d\,u$ ſerviranno per le compite equazioni per li moti de' gravi, sì accelerati, che ritardati, prodotti nella forma antecedentemente ſpiegata, le quali comprendono le relazioni di tempi, ſpazj, velocità, e maſſa, come pure la cauſa motrice, ſuppoſta per ora la gravità in qualunque modo coſtante, e variabile; con l' ajuto delle quali formole, e qualche altro principio ſtabilito, ammeſſa altresì la dovuta applicazione, ſi può procedere allo ſtabilimento delle teoriche, e leggi d' ogni altra ſpecie di moto, e farſi parimente ſtrada per le ricerche di tutte le quiſtioni meccaniche, ciò, che in fatti ſi vedrà nel corſo dell' Opera, per alcune, e delle principali, che accaderanno trattarſi.

S C O L I O II.

67. Sopra la gravità, come cagione produttrice del moto, le accennate leggi, e formule ſi ſono ſtabilite, per quanto è occorſo vedere. Ma oltre a queſta, è fuor di dubbio, che nella natura eſiſtono altre potenze capaci di produrre l' effetto ſteſſo, circa la generazione, ed eſtinzione de' movimenti; onde di comun conſenſo de' Matematici vengono annoverate tutte nel numero delle forze del medeſimo genere, e del genere pure della gravità ſteſſa; da che ne deriva per legittima conſeguenza, che tutto ciò, ch' in virtù di queſta ſi è fin quì ſtabilito, e quelle formule del num. antecedente dedotte, ſaranno applicabili per queſte pure, e perciò vengon chiamate dalla maggior parte formule delle forze continuamente applicate. Nel ſeguente Capito-

pitolo, dove si tratterà di quelle specialmente dell' Elasticità, si vedrà in effetto quel tanto, ch' ora si dice.

CAPITOLO V.

Delle Forze elastiche applicate ne' Movimenti.

68. L' Elasticità da' Meccanici vien riguardata in quella vista, che la gravità stessa, cioè come una cagione eziandio produttrice per la comunicazione de' movimenti. Perchè siccome quella da qualche ostacolo impedita, quel tale suo sforzo, o pressione si nomina forza morta, ed il mobile in cui si applica s' intende da questa affetto; di poi rimosso l' ostacolo, ed entrata in azione, forza viva diviene, che trasfusa nel mobile stesso s' intende num. 40., l' Elasticità parimente qualora venga compresso il corpo elastico, in qualunque maniera, che ciò succeda, cioè impedito dall' ostacolo di compressione, sarà questo tale suo sforzo per dilatarsi chiamato col nome di forza morta, ed il corpo a cui questa tal pressione è applicata sarà di questa tal forza affetto, e rimosso l' ostacolo, permettendo ch' entri in azione, o sia, che è lo stesso, dando campo libero di dilatarsi, si farà forza viva, e viva altresì la forza al corpo urtato trasfusa, necessitandolo al moto, come per maggior chiarezza vedrassi la descrizione nel seguente

ESEMPIO.

Tav. 1. Fig. 5. 69. L' Elasticità della Molla *OAL* sia la cagion produttrice del moto per rapporto al mobile *B*; venga questa appoggiata con un suo braccio *AO* al piano fisso, ed immobile *M*, compressa ad un angolo qualun-

lunque OAL da una forza attiva, o pressione P, premente l' altro braccio LA. Questa Molla così compressa, siccome si sforzerà a premere il mobile B, eserciterà perciò una forza morta, e da tale sarà affetto lo stesso B; s' intenda rimossa la forza attiva P, certo è, che si dilaterà entrando in azione quel tale suo sforzo, e diverrà per conseguenza una forza viva, che al mobile già detto B sarà necessariamente trasfusa, necessitandolo al moto per la retta LN, la quale potrà disegnarsi, o per lo spazio, o per lo tempo, comunque piaccia. Onde se si chiami la forza d' elasticità $= f$, la quantità della materia del corpo $B = M$, ed u le velocità, che il medesimo acquista per lo spazio, ovvero tempo LN, si avranno tutte le passioni, e rapporti, che al moto dalla gravità generato convengono, antecedentemente descritto.

COROLLARIO I.

70. Parlandosi di forza d' Elasticità di Molle, per ciò, che riguarda alla comunicazion del moto spiegato, è da avvertirsi col gran Bernoulli, che si fa astrazione dalla materia delle medesime, e dalla gravità, non considerandosi altro, che la loro figura, e dotata d' una elasticità perfettissima, la quale sia possibile di dilatarsi con infinita prestezza, tosto che sia rimossa la forza attiva, che cagionava la compressione.

COROLLARIO II.

71. Nel dilatarsi che fa la predetta Molla, la forza finalmente s' estingue, e ciò si è verissimo, ma non è stato fissato ancora però con qual ragione cresca,

F o di-

o diminuisca, onde è, che non sarà possibile ritrovare la forza assoluta d' elasticità, e nè pure per conseguenza il moto assoluto da questa prodotto; si possono però i moti comparativamente ritrovare, cioè determinando le velocità di due respettivi corpi in certi punti analoghi, e così aversi da queste le proporzioni, che fra le forze elastiche passano in tali detti punti, come in fatti così soglionsi ricercare le leggi a questi moti attinenti.

COROLLARIO III.

72. Dalla dilatazione, conforme apparisce dall' antecedente esempio, si produce la forza viva comunicata al mobile, cioè dalla dilatazione ne segue tale effetto di comunicazione, che è la forza stessa; per converso poi si potrà prendere la forza viva come cagione, e la compressione come effetto, qualora suppongasi, che la forza viva comprima, impiccolendo, per cagion d' esempio, l' angolo OAL della Molla predetta.

Le leggi provenienti da tali moti il citato Giovanni Bernoulli fu egli il primo, che distesamente le spiegasse, conforme può vedersi nel principio del Tomo III. delle Opere sue. Il Padre Riccati parimente ne' suoi Dialoghi, sotto la scorta sua, ne trattò giudiziosamente, ed altri, i quali non fa al caso nostro riportarli. Per non far restar digiuni di tal materia i Lettori, nelle due seguenti proposizioni s' indicheranno, e racchiuderanno le primarie proprietà, e passioni riguardanti questo tal delineato movimento.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

Essendo due serie di Molle fra loro eguali, ed egualmente compresse, cioè allo stesso angolo dilatate, le forze staranno come il numero delle Molle. Tav. I. Fig. 5. e 6.

73. Sia la Molla, o *Elastro* *OAL*, come altri han detto, che una serie ci rappresenti, e col braccio *AO* s' appoggi al piano immobile *M*, e l' altro *AL* tocchi il mobile, o palla *B*, compressa da una qualunque potenza *P*; l' altra serie della Fig. 6. sia di 4. Molle tutte eguali fra loro, ed uguali a quella, ed ugualmente compresse dell' altra serie suddetta, secondo il supposto. S' appoggi la prima di queste *MIN* al piano immobile *H* col braccio *MI*, certo è, che nel punto *N* farà sforzo contro dell' altra *NKO*, la quale essa pure sforzando a contrario, verranno ad equilibrarsi ambedue; così discorrendola, rispetto all' altre, la molla seconda farà equilibrio con la terza, la terza con la quarta, fino a tanto che l' ultimo punto *X* sia appoggiato alla Sfera *D*, all' altra *B* eguale, e sostenuta dalla potenza *Q*. Suppongasi ora, che le pressioni *P*, e *Q* sieno rimosse, le Sfere *B*, e *D* saranno dalla forza delle molle necessitate a moversi accelerandosi; se il punto *R* della Fig. 6. fosse stabile, come il punto *O* della Fig. 5., è per se evidente, che le Sfere ambedue egualmente si accelererebbero, ma per non esser tale, non sarà possibile, che si dilati la Molla *RSX*, senza che ancora le altre *RLO*, *OKN*, *NIM* si aprano, sforzando tutte il mobile *D* al movimento. Così che aperte in tutto, o in parte, purchè uniformemente le predette Serie, quelle della Fig. 6, per essere in maggior numero, più sforzeranno il mobile, cioè avrà egli più dell' altro della Fig. 5. acquistata velocità. Ognivolta che sia-

vi in un mobile velocità maggiore, è certo, che è dotato altresì di maggior forza dell' altro, avendosi ambedue supposti eguali; e perciò, al caso presente, nella Serie di 4 sarà la forza come 4, ed in quella dell' unità, come 1, ed i corpi in moto saranno per conseguenza dotati essi pure di forza come 4 ad 1, che è quanto dovevasi dimostrare

COROLLARIO I.

74. Sonosi così ritrovate esser le forze, ma dee avvertirsi però, che per rapporto alla produzione delle medesime, o sia alla dilatazione delle molle, non si è fatto verun conto del tempo, in cui vengono ad aprirsi, cioè a trasfondere la forza stessa nel mobile. Se il tempo debba, o non debba avervi parte non appartiene alle ricerche presenti, essendo bastante il ricavarsi le leggi sulle assunte supposizioni.

COROLLARIO II.

75. Siccome la Molla *MIN* sforza col braccio *IN* l' altro *KN* dell' altra *NKO* per dilatarsi, e lo stesso *KN* fa ancora egli uno sforzo contrario, ne seguirà, che in *N* faranno equilibrio, come se nello stesso punto *N* vi fosse collocato un piano fisso, ed immobile; lo stesso si replichi per gli altri punti *O*, ed *R*, a segno che in *R* s' intenda, che il piano stesso vi sia. Ne avverrà da ciò, che le potenze prementi *P*, *Q* egualmente ritenendo dilatate le Molle, le Sfere *D*, e *B* dalla forza delle medesime verranno affette d' eguali pressioni, o sia, conforme ne deduce il Bernoulli, che saranno fra loro eguali le forze morte.

CO-

COROLLARIO III.

76. Nella precedente Propofizione fi è veduto, che le forze del Corpo in moto, cioè le vive, ftavano come il numero delle molle, e perciò faranno di diverfo genere delle morte, che nel corollario antecedente furono eguali, verità, che ci infegna l'aver tal diftinzione di forze il fuo fondamento; in che ragione fieno poi con le velocità s' inferirà dalla feguente propofizione.

PROPOSIZIONE V.

Suppofte due Serie di Molle di forma eguale, ed egualmente aperte, che dilatandofi comunichino il moto a due Sfere; il numero delle Molle farà come le maffe delle Sfere ne' quadrati delle velocità moltiplicate. Tav. 2. Fig. 1. e 2.

77. Rapprefentino CD, ed NE le due refpettive Serie di molle eguali, ed egualmente aperte, ed il loro numero abbia altresì la ragione della CD ad NE; ciafcheduna di effe s' intenda come fopra appoggiata a' piani immobili A, ed M. Le due Sfere, che dalla forza delle due Serie, allorchè fi dilatano, debbono ricevere il moto, fi fuppongano ne' punti E, e D; le due Curve ELG, DUO fieno quelle, nelle quali le loro ordinate BL, TU, rapprefentino le velocità acquiftate de' refpettivi mobili ne' punti B, e T pervenuti; le *Afciffe*, o fpazj EB, e DT fi prendano nella ragione fteffa delle Serie NE, e CD, come pure gli elementi loro BK, e TQ. Si chiami il numero delle Molle $NE = n$, ed $EB = ns$, farà $BK = nds$; fe $CD = N$, per la ragione fra loro accennata, farà $n : N :: ns : DT = Ns$, ed il fuo elemento $TQ = Nds$; fia la Sfera in $E = m$, e così quella in $D = M$, la forza mor-

ta

ta, perchè sono egualmente aperte, si è veduto num.75. dovere essere eguale per rapporto ad ambedue, laonde sarà $= f$; si chiamino u, ed U le corrispondenti velocità de' corpi in B, e T; per le note leggi della forza di gravità sopra spiegate num. 66. si avranno i loro rapporti colle formule $\int nfds = \frac{mu^2}{2}$, ed $\int Nfds = \frac{MU^2}{2}$, e poste in analogia tali due equazioni, si avrà $n : N :: mu^2 : MU^2$, il che è quanto si propose di dimostrare.

COROLLARIO I.

78. Le forze vive furono come il numero delle molle num.73, e nell'antecedente, il numero delle molle sta come le masse ne' quadrati delle velocità, onde le forze saranno come le masse ne' quadrati delle velocità moltiplicate, cioè $f : F :: mu^2 : MU^2$.

COROLLARIO II.

79. Gli Spazj stanno come i quadrati delle velocità acquistate, num. 29. Sicchè in luogo di queste sostituendoli, sarà $n : N :: ms : MS$; e supponendo le Masse eguali, $n : N :: s : S$, vale a dire le serie come i respettivi spazj stan tra di loro.

COROLLARIO III.

80. Dalla ritrovata analogia cavando la radice; si avrà egualmente $u : U :: \sqrt{\frac{n}{m}} :: \sqrt{\frac{N}{M}}$, cioè le sem-

ſemplici velocità in ragion ſudduplicata diretta del numero delle Molle, e reciproca delle Maſſe.

COROLLARIO IV.

81. Si chiamino i tempi elementari impiegatì nello ſpazietto minimo $BK = dt$, e l'altri in $TQ = dT$, poichè num. 36. i loro incrementi ſtanno come i piccoli ſpazj per le velocità diviſi; avraſſi adunque, al caſo preſente $dt = \frac{n\,ds}{u}$, e $dT = \frac{N\,ds}{U}$, e poſte in analogia l'equazioni, $dt : dT :: \frac{n\,ds}{u} : \frac{N\,ds}{U} :: \frac{n}{u} : \frac{N}{U}$, e ſoſtituendovi le ragioni delle velocità del num. antecedente, riſulterà $dt : dT :: \sqrt{nm} : \sqrt{NM}$; onde i tempi intieri ancora ſtaranno come gli elementari, cioè fra loro in ragione coſtante, perchè nota è la maſſa, ed il numero delle Molle.

Varie ſuppoſizioni poſſono farſi intorno alle quantità aſſegnate, cioè, o di maſſe eguali, o di numero di molle, o pure in qualunque altra ragione ſupponendole, per rapporto a' Corollarj antecedenti, ma per brevità ſi tralaſciano, facendo paſſaggio frattanto all' applicazione degli ſpiegati principj per altre ſpecie di forze.

CA-

CAPITOLO VI.

Delle forze di tenacità, o sia resistenza della Materia cedente, applicate nel moto.

82. SE un corpo di qualunque massa si lascia cadere in una materia molle, o flessibile, non v'ha alcun dubbio, che nello scavare, che fa quella tal buca in detta materia, egli perderà successivamente la velocità sua, in vigor della coerenza, o unione, o resistenza delle parti, comunque che dir si voglia. Opponendosi adunque questa tenacità di materia al moto suo, farà sì, che ridurallo alla quiete, cioè produrrà variazione di stato nel mobile; onde è, che secondo la definizione 18. nel numero delle forze, o potenze questa tal resistenza, o tenacità di materia verrà considarata, e del genere della gravità stessa, per ciò, che alla affezione de' movimenti riguarda. Sicchè come a quella, così a questa saranno applicabili le Teoriche ne' capitoli antecedenti spiegate. Ed in fatti considerando ascendere il mobile, che è in quel caso, ch' il moto ritardato producesi, la gravità stessa, essa pure nient' altro sarà, in quanto all' effetto, che una forza di resistenza, poichè cagiona nel mobile l' estinzione del movimento, e perciò con tutta la ragione sì questa che quella come del genere stesso debbonsi riguardare.

Si sono fatti da molti Filosofi, e Meccanici sopra questa materia abbondanti sperimenti, per dedurre da tale scavamento fatto dal mobile gli effetti, e passioni, e maggiormente per determinare la gran quistione delle forze vive sopra indicata; ed acciocchè le esperienze prestassero la maggior precisione, e chiarezza, hanno a ta-

a tale effetto scelte alcune materie più molli, e cedenti, come Sego, Creta, ed altre a queste simili, che dotate fossero d'una coerenza, o tenacità per tutto simile, o almeno alla perfetta uniformità poco differente. Per ciò, che porta all' intento nostro, quale si è di vedere l'applicazione de' principj eziandio in questa specie di forza resistente col moto congiunta, supporrassi sempre, che la materia molle sia uniforme, senza cercare quale sia quella, che in effetto si è tale; sicchè supposta coerente egualmente in ogni luogo, dove il corpo in essa cadente ritrovasi, o sia, che è lo stesso, che la forza di resistenza resti ovunque costante, si procederà avanti, della medesima esplicando le leggi.

PROPOSIZIONE VI.

La profondità degli Scavi moltiplicata nella forza di tenacità, o resistenza costante, è proporzionale alla massa del corpo cadente, nel quadrato della velocità moltiplicata. Tav.2. Fig. 3. e 4.

83. Due corpi qualunque, uno M, e l' altro m abbiano le punte cilindriche eguali tutte fra loro, ma disuguali nel numero, come dalle figure stesse apparisce. Cada uno di questi M nella materia cedente RP, e l'altro m nella rp, e scavino le buche, che l' altezza dell'una sia $PN = N$, e dall'altra $pn = n$. Nel principiare a far tale scavamento, cioè giunti in RP, ed rp, certo è, che forniti saranno di una tale velocità, e perciò quella del corpo M si chiami $= C$ e l' altra $= c$; le forze di resistenza per tale scavamento sieno per uno $M = F$, e per l' altro $m = f$. Nelle altezze PN, e pn si prendano gli spazj PQ, e pq, ed i loro elementi pure alle predette altezze proporzionali; lo spazio PQ facciasi $= Ns$, sarà dunque il suo elemento QO $= Nds$.

$= Nds$. Per la proporzione assegnata, avrassi $N:n :: Ns: pq = ns$, e l' elemento $qo = nds$. Ciò posto applicando la forza nello spazio come al num. *66.* si è stabilito, quì perchè il moto si ritarda, e conseguentemente le velocità diminuiscono, si avranno le formule per uno $FNds = - MUdU$, e per l'altro spazietto, $fnds = - mudu$; ed ecco per un tal moto applicati i principj. Integrando adesso l'equazioni, verranno $FNs = - \frac{MU^2}{2} + A$, ed $fns = - \frac{mu^2}{2} + a$. La costante assunta si determina riflettendo, che nel principio dello scavamento, la velocità del Mobile M era $= C$, e l'altra $= c$, e che altronde $s = o$, sicchè $A = \frac{MC^2}{2}$, ed $a = \frac{mc^2}{2}$, e perciò sostituendo, avrassi $FNs = - \frac{MU^2}{2} + \frac{MC^2}{2}$, e così $fns = - \frac{mu^2}{2} + \frac{mc^2}{2}$.

84. Suppongasi in oltre, che sieno arrivati i mobili ne' punti N, ed n, avendo così scavate l' intiere buche, sarà svanita per conseguenza la velocità, cioè diverrà $U = o$, ed $u = o$, come pure $PQ = N$, ed $pq = n$; sicchè riducendosi l'equazioni, si avrà $FN = \frac{MC^2}{2}$, ed $fn = \frac{mc^2}{2}$, e costituitane la ragione, $FN:fn :: MC^2: mc^2$, che è per l'appunto ciò, che doveva dimostrarsi.

COROLLARIO I.

85. Quel che si avvertì al num. 74, che non si attendeva al tempo, per rapporto alla comunicazione delle forze d' elasticità, quì pure si osservi, mentre que-

questo non si computa per riguardo alla azione della forza di resistenza, producente l' estinzione del moto.

COROLLARIO II.

86. Per avere i tempi impiegati, assunti gli spazj elementari QO, e qo, chiamati i primi dT, e l' altri dt, per le cose note dal num. 36., avrassi per gli uni $dT = \frac{Nds}{C}$, e per gli altri $dt = \frac{nds}{c}$, e poste in analogia, $dT : dt :: \frac{N}{C} : \frac{n}{c}$. Dalla proposizione antecedente poi si è ricavato $C : c :: \frac{\sqrt{FN}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{fn}}{\sqrt{m}}$, così sostituendo le ragioni delle velocità nella ragion de' tempi suddetti, ne risulterà $dT : dt : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{F}} : \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{f}}$, cioè i tempi elementari saranno fra loro in ragion costante, e per conseguenza ancora l' intieri, e finiti medesimamente.

COROLLARIO III.

87. Se le Masse de' corpi fossero eguali, sopra avrebbesi allora, $C : c :: \sqrt{FN} : \sqrt{fn}$; e per i tempi $T : t :: \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{F}} : \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{f}}$.

COROLLARIO IV.

88. Essendo eguale il numero degli Scavamenti;

 sareb-

ſarebbe la ragione delle velocità nel coroll. 2. indicata, $C^2 : c^2 :: \frac{F}{M} : \frac{f}{m}$; e conſeguentemente i tempi $T : t :: \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}}$.

S C O L I O.

89. Lo ſcorrere i caſi tutti, ne' quali le formule ſtabilite ſono applicabili, ſarebbe progetto troppo vaſto, ed altresì non neceſſario; perchè capite le leggi, con le quali debbono i moti regolarſi, dalle antecedenti trattate teorie, potrà il Lettore agevolmente in tutti i caſi particolari d' altre qualſivogliano forze maneggiarſi. Per tanto, ſeguitando a ſupporre la potenza di gravità coſtante, ſi tratteranno i moti locali da queſta prodotti, dipoi ſi eſamineranno le affezioni di quei, ne' quali la forza con qualunque ipoteſi variabile venga riguardata, ſembrandomi eſſer queſto l' ordine, che alla chiarezza dell' idee con più facilità ci ne conduca.

C A P I T O L O VII.

Del Moto prodotto dalla gravità conſiderata conſtante.

90. SI è accennato ſopra al num. 37., che quantunque s' ammetta la gravità variabile a norma delle diſtanze dal centro comune, pure ſopra la ſuperficie della Terra, ed anche poco lungi da queſta, come coſtante, può ella, movendoſi il grave, ſenza taccia d' errore alcuno, riguardarſi. Oltre alla ragione ivi addotta, ſi è di più proccurato da' Filoſofi di comprovare un tale aſſunto per l' eſperienza; poichè potendoſi aver nota la gravità dal peſo della quantità della materia num. 57. hanno ſperimentato per reiterate prove, che tal

tal quale pesava il corpo nelle più alte sommità de' Monti, altrettanto si ritrovava essere nelle profondissime Valli; non essendo percettibile almeno la variazion sua al loro concepimento. Per lo che converrà il dedurne su quest' ipotesi ancora, relativamente a' moti, le particolari passioni, acciocchè in ogni aspetto le loro trattazioni s' abbraccino.

PROBLEMA I.

Dalla quiete si mova un corpo, la gravità del quale si conservi sempre costante, ritrovare la velocità, ed il tempo in qualsivoglia punto del trapassato spazio. Tav.2. Fig.5.

91. Dal punto M dalla quiete adunque se ne scenda il mobile per la direzione MC, e giunto in Q, sia in questo tal punto, che ritrovar si vogliono le enunciate affezioni. Chiamata la quantità della materia $= m$, le forze $= f$, e la velocità ivi acquistata $= u$, lo scorso spazio $MQ = s$, e preso lo spazietto elementare QK, verrà per conseguenza $= ds$, come pure l' accrescimento della velocità $= du$. Ciò stabilito, per i canoni del num. 66. che le forze nello spazio multiplicate sono proporzionali alle masse ne' quadrati delle velocità, per lo spazietto QK verrà $fds = mudu$, ed integrando, $fs = \frac{mu^2}{2} + A$. Per determinare questa costante si osservi, che supponendo il mobile nel punto M, diviene $u = o$, e similmente $s = o$, e perciò $A = o$, che ciò vuol dire, che all' equazione non le compete addizione alcuna, laonde resta $u = \frac{\sqrt{2fs}}{\sqrt{m}}$; e perchè si tratta quì del moto d' un corpo solo, di cui non è necessario farne con altra massa il rapporto, si po-

ſi potrà perciò porre $m = 1$ (il che s' avverta una volta per ſempre) onde finalmente avraſſi $u = \sqrt{2fs}$, cioè la velocità ricercata nel punto Q, data per le quantità, ovvero eſpreſſe paſſioni del moto, e che ſta in ragion compoſta ſudduplicata delle forze, e degli ſpazj.

92. Il tempo impiegato nello ſcorrere lo ſpazio MQ ſi chiami $= t$, e perciò $= dt$ nel ſuo elemento QK; conforme appariſce dal num. 36. conſiderato in queſto come equabile, ſi avrà $dt = \frac{ds}{u}$, e ſoſtituendo in luogo di u il ritrovato valore del num. antecedente, verrà $dt = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2f}} \times s^{-\frac{1}{2}} ds$, che integrando, quì pure ſenza aggiunta di coſtante, perchè viene $= o$, ſi ritroverà $t = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2f}} \times \frac{s^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{\sqrt{2ms}}{\sqrt{f}}$, e fatta $m = 1$, $t = \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{f}}$; cioè il tempo in ragion ſudduplicata diretta degli ſpazj, e reciproca delle forze.

COROLLARIO I.

93. Non v'era neceſſità per la ſoluzion del Problema valerſi dello ſpazio infinitamente piccolo, perchè num. 65., la gravità preſa coſtante, ſerviva l' equazione per lo ſpazio finito $2fs = mu^2$, e la velocità veniva come ſopra $u = \frac{\sqrt{2fs}}{\sqrt{m}}$; ma ciò ſi è fatto per prender la formula nella ſua generalità. Il tempo poi ſi avrebbe ritrovato egualmente, o col prendere l' equazione del num. 62. $ft = mu$, o pure l' altra al num. 31. $2s = ut$, che il valore della velocità di una di queſte

queſte ſoſtituendo, ſarebbe $t = \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{f}}$, come antecedentemente ſi è ritrovato.

COROLLARIO II.

94. Ammeſſa la potenza di gravità uniforme ſi è veduto adunque, che per l' aſſegnato ſpazio MQ, vengono date le velocità, ed il tempo impiegato, in cui egli ſi ſcorre. Se viceverſa in cambio d' aſſegnare lo ſpazio ſi poneſſe per data la velocità, ed eſpreſſa per l' altezza MQ, facendo come ſopra, dall' equazione ſteſſa del num. *91.*, ſi ricaverebbero gli ſpazj, ed i tempi in queſti ſpazj ſteſſi impiegati, dati per la velocità, o ſia altezza predetta.

COROLLARIO III.

95. Se dati ſieno i tempi impiegati dal mobile, ſi potrà ritrovare allora la velocità acquiſtata, e lo ſpazio ſcorſo, l' una e l' altro dati per lo tempo. Sicchè ſuppoſta l' altezza MQ, che dinoti il tempo dato, ſarà per conſeguenza n. *66.* $f\,dt = m\,du$ la formula per lo tempo elementare QK; ed integrando ſenza addizione di coſtanze, perchè viene $= o$, ſi avrà $u = \frac{ft}{m}$ cioè la velocità data per lo tempo.

COROLLARIO IV.

96. Dalla formula più volte citata ſi ha $dt = \frac{ds}{u}$ al caſo preſente, e ſoſtituendo le velocità precedenti, riſulterà $ds = \frac{ft\,dt}{m}$, ed ecco gli ſpazj dati per i tempi. Dalle quali tutte equazioni ſi potrà levare la

maſſa

massa fatta = 1, se così piaccia, conforme di già poco avanti fu avvertito.

COROLLARIO V.

97. Dunque da' anzidetti Corollarj si fa manifesto, che tutte le volte ch' una delle tre affezioni del moto, cioè, o lo spazio, o il tempo, o la velocità sia data, sarà in poter nostro d' aver l' altre due, colla supposizione sempre della forza invariabile. Quella qualunque sia tale affezione, che data venga, si potrà esprimere a piacere, o in piedi, o in braccia, o in minuti, in somma con una qualsivoglia misura, che si stimi a proposito specificarla.

COROLLARIO VI.

98. Se due sieno i corpi, che con le stesse leggi si movano, uno essendo quello, che già finora si è supposto, e l' altro sia M, che scorra altra altezza, o spazio arbitrariamente assunto, denominato tutto come sopra, ma con le lettere maggiori, per le ragioni stesse, in un punto qualunque ritrovandosi il mobile, avrassi $U = \frac{\sqrt{2FS}}{\sqrt{M}}$; che perciò paragonate le velocità d' ambedue, si avrà $U : u :: \frac{\sqrt{2FS}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{2fs}}{\sqrt{m}}$, cioè che stanno in ragion composta sudduplicata delle forze, e degli spazj, ed inversa delle masse.

CO-

COROLLARIO VI.

99. Se $M = m$, cioè eguali i corpi fra loro, la ragione delle velocità sarà $U : u :: \sqrt{2FS} : \sqrt{2fs}$; vale a dire le celerità in proporzion suddupla composta delle forze, e degli spazj.

COROLLARIO VII.

100. E se $S = s$, s'avrà $U : u :: \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{m}}$, cioè le velocità in ragion diretta sudduplicata delle forze, e reciproca delle Masse.

COROLLARIO VIII.

101. Ponendo $U = u$, il restante si ricaverà pure, che sta nella ragione stessa d'eguaglianza, cioè $\frac{\sqrt{2FS}}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{2fs}}{\sqrt{m}}$, onde in tal caso $S : s :: \frac{f}{m} : \frac{F}{M}$, cioè gli spazj direttamente come le masse, e nella reciproca delle forze.

COROLLARIO IX.

102. Il tempo di questo secondo mobile dovrà essere espresso, per legittima conseguenza, come l' altro del num. 92. Sicchè chiamato $= T$, verrà $T = \frac{\sqrt{2MS}}{\sqrt{F}}$, e

paragonati fra loro, saranno $T : t :: \frac{\sqrt{2MS}}{\sqrt{F}} : \frac{\sqrt{2ms}}{\sqrt{f}}$;
e per rapporto a questi egualmente possono farsi varie supposizioni di spazj, o di Masse, o tempi eguali, il che essendo per se facile, ed altresì per altra parte della Statica ben noto, perciò si tralascia.

SCOLIO I.

103. Si è avvertito al num.26. quando che non si era per ancora congiunta la potenza co' movimenti, ch' il moto ritardato era della natura stessa dell' accelerato, perchè supponevasi tanto crescere la velocità scendendo, quanto diminuirsi salendo. Al presente si vede manifestamente la ragione d' un tale asserto, perchè essendo la cagione produttrice del moto la potenza di gravità, costante considerata, non vi è maggior ragione, ch' in un corpo agisca più nel salire, di quel che nello scendere, e perciò produrrà un effetto eguale in ambedue i moti, in senso contrario però, facendo per l' energia sua crescere le velocità dette in un caso, e diminuirle nell' altro, ma sempre con proporzionata ragion fra di loro; resterà evidente quanto si dice dall'Esempio, che segue.

ESEMPIO.

Tav.2. Fig. 6. 104. La retta AD sia la direzione del mobile, il quale parta dalla quiete nel punto A, presa questa, o per gli spazj, o per i tempi, come più piace. La forza di gravità continuando ad essere $= f$, la massa $= m$, e se AB sia lo spazio, si faccia $= x$, e l'altro $BD = p$, e tutto

tutto l'intiero $AD = s$. Allorchè il mobile avrà trapassato il primo spazio AB, pongasi ch'acquistata abbia nel punto B la velocità $BC = c$: onde secondo le già note regole, sarà la formula $2fx = mc^2$; dipoi continuando il suo viaggio, e giunto in D, sia per l'intiera velocità del medesimo $DV = u$; quì pure per le leggi stesse riescirà $2f.\overline{x + p} = mu^2$; e perchè $x + p = s$, perciò $2fs = mu^2$, espressione già nota per la discesa della tutta altezza AD.

Quando il mobile si ritrova in D, se considerar vuolsi il solo spazio $BD = p$, la specifica velocità in questo acquistata sarebbe KV, perchè di già la $DK = BC$, prima di scorrerlo l'aveva; quindi detratta quella, la propria formula ch'esprime la vera legge sarebbe $2fp = mu^2 - mc^2$.

Suppongasi ora, che con l'intiera velocità DV ascenda verso A, giunto in B, è naturalissimo, che scorrendo lo spazio stesso, l'effetto della potenza ei sia pure lo stesso, per rapporto alla mutazione della velocità, per lo che avrà perduta la velocità KV, e gli sarà rimasa la sola BC; cioè avrà di meno la tutta velocità DV, con di più però la BC, vale a dire $-DV + BC$ sarà quella, di cui è fornito nel punto già detto B, o sia, esprimendola per l'equazione dell'Analisi, $2fp = mc^2 - mu^2$, che è per l'appunto la medesima della scesa, poco fa ritrovata, ma negativa come esser dee. Arrivato finalmente in A, l'effetto della potenza a mutare la velocità per l'altezza medesima AB dello scendere, sarà lo stesso, e perciò la BC diverrà $= o$, posciachè a contrario ella agisce la nominata potenza; sicchè $2f.\overline{p + x} = o - mu^2$, cioè per essere $p + x = s$, $2fs = -mu^2$; ed ecco come si è detto, che il moto ritardato è della natura stessa dell'accelerato, non

H 2 diffe-

differendo in altro, che in uno la potenza aumenta, e nell' altro d.minuifce la celerità del mobile.

COROLLARIO I.

105. Avendo perduto nel punto A la fua velocità afcendendo, fecondo che poco fa fi è veduto, non avrà perciò oltrepaffato l' altezza, o fpazio d' allorchè fcefe, così che lo fpazio della fcefa farà eguale a quello della falita.

COROLLARIO II.

106. Si ricava parimente dall' Efempio, che nel punto B, o accelerandofi, o ritardandofi, era il mobile dotato fempre della velocità medefima, e ciò fi può afferire di qualfivoglia altro punto prefo ad arbitrio; dunque in qualunque luogo, che fi ritrovi dell' altezza AD, la velocità d' ambedue i moti farà dello fteffo valore.

COROLLARIO III.

107. Se l' altezza della fcefa è eguale a quella della falita, corollario 1, e la velocità parimente coroll. 2, farà adunque il tempo impiegato nello fcendere eguale a quello del falire. Ed in fatti fupponendo nel primo cafo, che fia $2S = UT$ num. 31., e nell' altro $2s = -ut$ num. 35. fi avrà, ponendofi in analogia le quantità, $2S : 2s :: UT : -ut$, cioè $-2Sut = 2sUT$, e perchè $S = s$, ed $U = -u$, onde $T = t$, vale a dire i tempi eguali, come fi è detto, e però onninamente fimili fra di loro i ricordati movimenti.

CO-

COROLLARIO IV.

108. Nell' antecedente Problema la suppoſizione fu, che privo d' ogni velocità il mobile ſi ritrovaſſe quando ſcorrer doveva lo aſſegnato ſpazio, cioè che dalla quiete, ovvero infinita tardità ſen partiſſe; ſi potrà però ſupporre ancora, che per la retta AC movendoſi, dotato ſia nel punto A d' una data qualunque velocità $AU = c$, e perciò pervenuto in S, ove rinvenir ſi vogliono i tempi, e le velocità, ſi chiami al ſolito $AS = s$, ed il ſuo ſpazio elementare $Sp = ds$, le forze, e le velocità acquiſtate come ſopra, ſi avrà $fds = mudu$; ed integrando $fs = \frac{mu^2}{2} + A$; ſupponendo il mobile in A, diviene $u = c$, ed $s = o$, quindi la coſtante, fatta $m = 1$, ſarà $A = -\frac{c^2}{2}$, per lo che ſoſtituendo, ne viene $fs = \frac{u^2 - c^2}{2}$, cioè $u = \sqrt{2fs + cc}$, che ſarà la velocità ritrovata in queſta ſuppoſizione. Tav. 3 Fig. 1.

109. Per averſi il tempo, queſto ſi ſa dal num. 36., che nello ſpazietto minimo, verrà, ſoſtituita la celerità precedente, $dt = \frac{ds}{\sqrt{2fs + cc}}$, e prendendo l' integrale, $A + t = \frac{\sqrt{2fs + cc}}{f}$; ſuppoſto pertanto che ſia $t = o$, ſarà pure $s = o$, e però $A = \frac{c}{f}$, e ſoſtituendo nell' integrata equazione, $t = \frac{\sqrt{2fs + cc}}{f} - \frac{c}{f}$, valore dell' intiero, ſcorſo fino in S, o in altro punto qualunque aſſunto.

CO-

COROLLARIO V.

110. Espressa adunque la velocità iniziale, e gli spazj con una misura di qualsivoglia specie, sarà in poter nostro avere il tempo, e la velocità, dati sì l'uno, che l'altra per una tale specificata misura.

CAPITOLO VIII.

Del Moto considerato in ipotesi della potenza, o forza variabile.

111. DOpo d'avere stabilite le leggi, che accompagnano i movimenti generati da una potenza costante, e per tale, come una di tal sorta, assunta la gravità sopra la superficie della Terra, sull'esempio del Galileo stesso, per quanto è occorso vedere; farò passaggio ad indagare adesso quei, che da una potenza, o forza, che muti il valor suo egli vengon prodotti, la quale, secondo la frase comune de' Meccanici, potenza, o forza variabile suole appellarsi.

Questa tal potenza di gravità, considerata spingere i corpi verso del loro comune centro, s'immaginano i moderni Filosofi, che quella sua energia, o impulso sia in un grave variabile a norma della maggiore, o minor vicinanza da questo tal punto. Di maniera che situato in una cima di Monte, la gravità, che lo necessita sarà diversa da quella, di cui in una profonda Valle esistente affetto ne venga; se non sensibile mostrisi tal varietà, come fu innanzi stabilito, vera e reale però, secondo essi, ella esser dee in sostanza.

Una simil legge, conforme vedremo dopo alcune cose premesse, deriva in conseguenza del sistema dell'

dell' insigne Cavalier Newton, seguitato da tutti i Filosofi di conto della moderna Filosofia, e comprovato da' Fenomeni, che in natura stabilmente succedono, de' quali non appartiene in questo trattato la loro investigazione. Secondo l' incomparabile citato Autore adunque si pone per principio, ch' ogni corpo abbia verso dell' altro scambievole tendenza, ovvero impulso, cioè che reciprocamente uno nell'altro eserciti la gravità sua. Se si forma il concetto, che uno d' essi spontaneamente verso dell' altro sia tendente, si chiama, come sopra apparisce dagli antecedenti capitoli, questa concepita tendenza, forza di gravita. Viceversa poi, se si concepisca un corpo verso di cui un altro sia spinto, o pure attratto, suole chiamarsi allora forza d'attrazione, o forza attrattiva. La differenza però, come vedesi, non è in fatti, che nel concepimento della relazione, mentre l' effetto prodotto risulta lo stesso; e perciò volendo per la cagione questo denominarsi, se ne formerà l' intelligenza medesima tanto col dire, che i corpi reciprocamente gravitano fra loro, quanto dicendo, che sono attratti scambievolmente; onde ritenuto questo concepimento in seguito nelle ricerche, nelle quali rammentar dovrassi de' mobili una tale funzione, avranno le due accennate espressioni equivalente senso, e valore.

Da questa tale mutua forza de' corpi si rende chiaro, che considerata in varj aspetti si possono dedurre, per le cose fisiche e delle ammirabili, ed infinite nozioni per rapporto ad essa; ma lasciando quei riflessi non attinenti all' intento nostro, si riguarderà in quella vista, che opera come cagione del moto de' gravi, il quale si è in punto il fine propostoci.

112. Una tal forza, o tendenza in qualunque corpo sferico, o poco meno che sferico, come son tutti i

ti i corpi celesti a noi cogniti, è di già da più d' uno provato, che opera, come se collocata avesse tutta la sua energia, o attrazione in un sol punto, che questo è quel giustamente, che chiamasi poi centro delle forze, centro comune de' gravi, o centro del moto, avendo tali espressioni, in se stesse il significato medesimo. Onde la Terra gravitando scambievolmente con i corpi circonvicini, cioè mutuamente attraendosi, questa tal forza con azione, o attrazione alla quantità della sua mole proporzionale, num.60. collocata nel punto predetto opererà talmente in essi, che per esser della loro assai maggiore, gli sforzerà a tendere, cioè verso il detto centro saranno attratti, o sospinti. De' Pianeti primarj, ch' intorno al Sole si aggirano, come pure de' Satelliti al loro Pianeta, si applicheranno le riflessioni medesime.

113. Il Newton, ed altri sotto la scorta sua, l'han chiamata con generico nome, forza Centripeta, la quale poi con diversi rapporti, e con varie proporzioni, ei spezialmente la distingue, come ne' suoi principj della Filosofia naturale alle prime definizioni può da chiunque vedersi. Forza Centripeta assoluta chiama quella consistente nel centro stesso, e che ivi tuttá la sua energia misurasi, senza riferirla a niun corpo, che attratto ad esso sia: porta egli stesso l' esempio della forza della Calamita, che costituita in maggior quantità, avrà ancora maggiore attività di virtù attrattiva per se stessa, e sola considerata; e perciò dipendendo ella dalle sue componenti particelle, ovvero dalla quantità della mole, ne seguirà, esemplificando, che la centripeta del Sole assoluta sarà maggiore di quella della Terra, perchè questa paragonata con quello è minore di Massa.

Forza Centripeta accelerante, o accelerativa denomina quella tale, che è l' assoluta, ma a diverse di-

stan-

ſtanze riferita; quindi la Magnete predetta attirando un grave a qualche lontananza collocato, la di lei forza aſſoluta convertiraſſi in accelerante; ed anche eziandio accader dee ch' agiſca più in diſtanza minore dal centro, e meno in maggiore, mentre l' aſſoluta accennata ne' corpi, che più al mentovato centro ſon proſſimi, maggiormente diffonderà la virtù ſua, per eſſere ivi, come ſupra fu detto, intieramente concepita: ed ecco dunque come in virtù del ſiſtema, la variazion della forza, a norma della diverſa diſtanza avvenir deve; il che, ſiccome della Calamita, così altrettanto della mutua gravità potraſſi aſſerire. Per tanto ſupponendo un corpo lungi da queſto, quella tal forza attrattiva, ch' in tal corpo opera ſarà l' accelerativa, o pure quel tale sforzo, o tendenza del medeſimo al centro, verrà ad eſſere la detta forza. Se a contrario ella produce un' azione in eſſo, che non ad accoſtarſi, ma che a receder bensì lo sforzi dal punto detto, cioè, che da poſitiva, negativa divenga tal forza, alcuni altri moderni l' han chiamata allora forza Centrifuga.

114. Tali nozioni premeſſe per ſervire d' intelligenza degli Autori, che relativamente a' moti delle potenze parlano, e per procederſi da me con chiarezza; s' avverta pertanto, che la centripeta accelerativa ſarà chiamata in queſt' Opera forza Centrale, o ſemplicemente forza, e la negativa, cioè la centrifuga, forza reſpingente, o repulſiva, poichè ſecondo il metodo, che mi ſon prefiſſo, col nome di forza Centripeta, e Centrifuga s' indicheranno altre modificazioni di queſte dette forze, conforme dal Libro ſecondo dove i moti curvilinei liberi ſaran trattati, apparirà chiaramente.

DEFINIZIONE XX.

115. *Forza centrale adunque, o forza tendente al Centro, ovvero ſemplicemente forza s' intenderà eſſer quella tale, che ſituato il corpo in qualunque diſtanza dal Centro, verſo d' eſſo con una legge qualſivoglia lo ſpinge.*

DEFINIZIONE XXI.

116. *Forza reſpingente, o repulſiva ſarà quella poi, per cui, a contrario, verrà dal Centro reſpinto.*

117. Nelle leggi da ſtabilirſi in queſta preſente ipoteſi delle potenze variabili, allorchè ſi dirà, che le forze ſtanno in qualche ragione delle diſtanze dal centro, niente altro s' intenderà, che il mobile a quelle tali lontananze ſituato, viene ſpinto, o reſpinto da queſto con una forza corriſpondente alle accennate diſtanze, con qualche legge di proporzione determinata dall' Autore della Natura. E comechè ogni forza ſi è quantità, quindi è, che ella ſarà rappreſentata con la tale lontananza, o retta linea, in quella maniera, che dell' altre affezioni del moto, cioè ſpazj, tempi, e velocità ſopra ſi ha praticato.

Con qualunque iſpezione, che le forze ſi additino, reſta per ſe evidente, che la diſtinzione fatta ſopra generale di forza morta, e forza viva, riceve l' intelligenza ſteſſa: perchè ſe varia al variar di luogo la potenza d' un corpo, ſarà però mai ſempre vero, che ſtando in quiete, gli sforzi di queſta ſaranno morti, benchè replicati di diverſo valore in cotal ſito diverſo; e così per conſeguenza per l' azione da queſti prodotta, comunque ella ſia, in viva traſformeraſſi la forza.

Che le formule ſteſſe del num. *66.* applicate alla po-

potenza di gravità, debbano aver luogo ancora in queste varie denominazioni di forze, stimo inutile l'avvertire; mentre lo speciale assunto aspetto della potenza non cangia alla medesima la proprietà, o natura, di quel suo essere effettivamente potenza; e perciò si procederà alla soluzion de' problemi, considerando tutte le passioni de' movimenti in tale accennata ipotesi, e così dopo questi avrem fatto fine alla prima presente Parte del moto rettilineo nel vacuo presentemente assunto ad esaminare.

PROBLEMA I.

Dalla quiete cada un corpo dal punto A verso il Centro delle forze C, e sia la forza centrale in A alla forza in qualsivoglia altro punto B in ragion diretta de' viaggi, o distanze da farsi AC, e CB, ritrovare in qualunque punto dello spazio CA le velocità, ed i tempi. Tav. 3. Fig. 2.

118. Essendo dato il centro C, e la situazione del corpo in A, si chiami perciò la distanza $AC = a$; arrivato il corpo in B, sia lo scorso spazio $AB = s$, ed il suo elemento $Bb = ds$, e l'altro poi da passarsi $BC = x$, e la velocità acquistata come è solito $= u$, e du il suo elemento; la massa per le ragioni nell'antecedente Problema addotte $= 1$, e la forza nel punto $A = F$, e nell'altro $B = f$; secondo la supposizione dovrà stare adunque $F : f :: a : x$; cioè la forza in B come x; applicata pertanto nella solita formula per lo spazio, nell'elemento Bb, si avrà $xds = udu$; ma $AB = s = a - x$, e però avremo $ds = -dx$, e sostituito in luogo di ds il suo eguale nell'equazione, si ritrova $-xdx = udu$; che integrata poi ci dà $C - \frac{x^2}{2} = \frac{u^2}{2}$. La costante si determina riflettendo, che

 fatta

fatta $x = a$, diviene $u = o$, onde $C = \frac{a^2}{2}$, e questa surrogandola, si avrà finalmente $u = \sqrt{a^2 - x^2}$; espressione per le ricercate velocità nel punto B; ed è un' equazione, conforme è noto, che spiega la natura del circolo dal raggio $= a$; laonde centro in A, descritto il quadrante CAI, l' ordinata $BS = \sqrt{a^2 - x^2} = u$, esprimerà le velocità dette.

119. Il tempo impiegato nello scorso spazio AB, si avrà dalla equazione già più volte citata $\frac{ds}{u} = dt$; e perchè quì si ha $ds = - dx$, onde per l' elementare spazio Bb sostituendo questo valore, e l' altro delle ritrovate velocità antecedenti, viene $dt = \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, e $t = \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

COROLLARIO I.

120. Ancora in altra maniera potrannosi avere i tempi, e ciò sarà da quel che fu stabilito num. 66. che $fdt = du$, mentre differenziando l' anzi detta velocità, riesce $du = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, e quindi sostituendola, hassi $fdt = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; ma nella supposizion del Problema sta $f = x$, sicchè $dt = \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, come nell' antecedente numero si è trovato.

Se

Se i membri dell' equazione si moltiplicano per la costante a, viene $dt = \frac{1}{a} \times \frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e $t = \frac{1}{a} \times \int \frac{-adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; il che si sa essere dall' Algebra un arco di cerchio col raggio $= a$, ritrovato per lo seno retto. Sicchè condotto il raggio CS, nel quadrante sopra descritto tutte le affezioni del moto in questa supposizione s' esprimono; perchè la forza nel punto B viene alla BC proporzionale, lo spazio scorso ad AB, le aquistate velocità alla BS; ed il tempo impiegato, cioè $t = \int \frac{-adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = AS$, o sia che è lo stesso, all' angolo ACS proporzionale.

COROLLARIO II.

121. Se nel punto A non sia $u = o$, cioè non principj dalla quiete a muoversi il corpo, ma abbia ivi in qualche maniera una data velocità $= U$, l' equazione integrata nel Problema sarà la stessa, ma varierà la costante da aggiugnersi; poichè fatto $x = a$, diviene $u = U$, onde $C = \frac{U^2 + a^2}{2}$, la quale sostituita nell' anzidetta equazione $A - \frac{x^2}{2} = \frac{u^2}{2}$, ne risulta $u = \sqrt{U^2 + a^2 - x^2}$ per lo valore delle velocità acquistate nel punto B.

CO-

COROLLARIO III.

122. Il tempo impiegato poi in questa supposizione si ritrova egualmente dalla equazione $dt = \frac{ds}{u} = \frac{-dx}{u}$, che al caso nostro, col sostituire le antecedenti velocità, trovasi essere $t = \int \frac{-dx}{\sqrt{U^2 + a^2 - x^2}}$.

COROLLARIO IV.

123. Ritenuta la proporzione stessa delle forze nella diretta ragione delle distanze, pongasi, che due sieno i gravi dalla quiete partiti, o pure rivenendo lo stesso, che sia egli un solo, ma che da diverse altezze, o distanze incominci a moversi verso del centro; il punto A, e la distanza CA sieno in un' ipotesi, conforme nel Problema venne fissato; il punto O, e la distanza CO sia altronde l'altro caso supposto: denominato in questo parimente tutto come sopra, ma con lettere majuscole, di maniera che sia $CO = A$, e supposto il corpo dal punto O pervenuto in R, si chiami $CR = X$, le acquistate velocità $= U$, lo spazio scorso $OR = S$, il suo differenziale $= dS$, ed il tempo impiegato $= T$. Siccome quando dal punto A è giunto in B si ritrovò ivi essere $u = \sqrt{a^2 - x^2}$; per la ragione stessa, da O pervenuto in R, dovrà esser pure $U = \sqrt{A^2 - X^2}$; vale a dire questa come quella, proporzionata all' ordinata del circolo del raggio $= A$; perocchè fatto centro C, col dato raggio OC si descriva il quadrante di circolo COK, l' ordinata RN sarà alla velocità proporzio-

zionale di questo secondo supposto, e fattone il paragone tra loro, starà $U : u :: \sqrt{A^2 - X^2} : \sqrt{a^2 - x^2} ::$ $RN : BS$.

COROLLARIO V.

124. Allorchè sì dall' una, che dall' altra altezza suppongasi di già nel centro C pervenuto il mobile, diviene $x = o$, ed $X = o$, onde risultano l' equazioni antecedenti $U = A$, ed $u = a$, cioè $U : u :: A : a$, che ciò vuol dire, che le velocità sono alle distanze, o altezze proporzionali.

COROLLARIO VI.

125. Essendo in tal caso $A = CK$, ed $a = CI$, dunque surrogando l' eguaglianza della ragione, hassi $U = CK$, ed $u = CI$; vale a dire, le velocità nel punto C una viene CK, e l' altra CI, come in fatti ivi tali divengono le ordinate, che le celerità esprimer debbono.

COROLLARIO VII.

126. Rispetto a' tempi impiegati de' due respettivi moti si possono fare egualmente fra loro le relazioni; e come di quello nel problema antecedente ritrovato, nel punto B esistente il mobile, così dell' altro nel punto R arrivato, avrassi $T = \int \frac{-A\,dX}{\sqrt{A^2 - X^2}}$, cioè espresso per l' arco ON, o pure per l' angolo OCN; sicchè paragonandoli, $T : t :: \int \frac{-A\,dX}{\sqrt{A^2 - X^2}} : \int \frac{-a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

:: an-

: : angolo OCN : angolo ACS ; ma gli angoli rettilinei son fra di loro nella ragion diretta degli archi , e nella reciproca de' raggi ; per lo che sarà $T : t :: \frac{ON}{OC} : \frac{AS}{AC}$, cioè i tempi egualmente nella stessa ragione.

COROLLARIO VIII.

127. Compiti i respettivi viaggi , cioè nel centro C giunto il corpo cadente sì dall' una, che dall' altra altezza , vedesi , che viene l' angolo $OCN = OCK$, come pure l' altro $ACS = ACI$, cioè $OCK = ACI$, e perchè OCK rappresenta il tempo dell' intiera caduta dall' altezza CO , e l' angolo ACI indica quello della caduta dell' altra distanza CA , essendo questi eguali , saran perciò eguali i tempi fra loro , quantunque il moto da altezze diverse abbia il principio.

COROLLARIO IX.

128. In altra forma la suddetta eguaglianza de' tempi può ritrovarsi ; mentre essendo l' arco OK quello, che esprime l' intiera caduta del grave dal punto O, e l' altro AI , il tempo della caduta CA , per essere essi simili, si avrà $CO : OK :: CA : AI$, che riducendo ad equazione ne viene $\frac{OK}{CO} = \frac{AI}{CA}$, ma num. 126. i tempi son fra loro nella ragione diretta degli archi, e nella reciproca de' raggi , sicchè $T : t :: \frac{OK}{CO} : \frac{AI}{CA}$, la qual ragione essendo eguale , saranno per conseguenza pure eguali i tempi fra loro.

CO-

COROLLARIO X.

129. Da ciò si ricava ancora, che se in qualsisia punto de' respettivi fatti viaggi si conducano le perpendicolari all' altezze esprimenti le acquistate velocità, dipoi dal centro tirata una retta all' estremità delle medesime, con condizione, che tagli questa gli archi simili, i tempi degli accennati viaggi saran sempre eguali fra loro.

PROBLEMA II.

Dal centro sia respinto un Corpo, che collocato in Tav. 3.
A parta dalla quiete, e la forza repulsiva stia in ragion Fig. 3.
diretta delle distanze, trovare la velocità, ed il tempo in qualsivoglia punto del suo viaggio.

130. Sia C il centro delle forze, ed A sia dunque il punto, ove dalla quiete il grave venga respinto accelerandolo esse per la retta CB; arrivato in B, per le condizioni del Problema deve essere la forza repulsiva in A alla forza in B, come CA, a CB; chiamata pertanto $CA = a$, $CB = x$, lo scorso spazio $AB = s$, ed il suo differenziale $= ds$, e la velocità, di cui in tal punto è affetto il mobile $= u$, perchè in B la forza sta come x, nello spazietto elementare per le cose già note, si avrà $x ds = u du$: e riflettendo, che $x - a = s$, sarà differenziando, $dx = ds$, sostituito il valore di ds, risulta la formula $x dx = u du$, e sommando l'equazione, ne troveremo $A + \frac{x^2}{2} = \frac{u^2}{2}$; per avere l'assunta costante si osservi, che supponendo il mobile in A, cioè $x = a$, viene $u = o$, imperocchè

ſi avrà $A = -\frac{a^2}{2}$, la quale ſoſtituita, ci dà $u^2 = x^2 - a^2$, e cavando la radice $u = \sqrt{x^2 - a^2}$, eſpreſſione per la ricercata celerità; dove ſi vede, ch' in null' altro varia dalla ritrovata nelle forze centrali, che in eſſere negativa, come di fatto così riſultar deve, perchè niente ſi mutano le condizioni del Problema, ſe non che in ſupporre diretta in parte oppoſta la forza. L' equazione poi, conforme è noto, viene all' Iperbola equilatera; onde fatto centro C, col ſemiaſſe $= a$ deſcritta venga la curva accennata AN, l' ordinata BS indicherà le velocità in tal punto acquiſtate.

131. Si prenda l' equazione ſolita, per avere i tempi, $\frac{ds}{u} = dt$, e ſurrogandovi le velocità, come pure dx in luogo di ds, ſi ritroverà $dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, ed integrando, $t = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a}}$; che ſarà il tempo intiero dal principio del moto, fino in B, e ſe ſi multiplichino ambedue i membri dell' equazione per a^2, ne riſulterà $t = \frac{1}{a^2} \times \int \frac{aadx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, che ciò viene a dire, ch' il tempo impiegato ſi è doppio del Settore iperbolico CSA, mentre coſta dall' Algebra, che $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = CSA$, la quale eſpreſſione ſi è la metà, conforme vedeſi, della ritrovata del già detto tempo.

CO-

COROLLARIO I.

132. Siccome nella centrale, così in questa forza repulsiva si potrà supporre, che un corpo da diversi punti dalla quiete venga lontan dal centro respinto per la retta CB, ed alla maniera, ch' in quella si è fatto; se ne ricaverebbero le illazioni delle velocità all' ordinate dell' iperbole proporzionali, come pure i tempi intieri de' viaggi fino ad un comune punto concepiti, eguali fra loro, con altro raziocinio però applicato alla natura dell' iperbole, che per essere di facile esecuzione, ed al sopra fatto consimile, si omette.

COROLLARIO II.

133. Su la supposizione, che il grave stia nel Centro C allorchè dalla quiete si parte, deve venire $a=o$, cioè la forza, che supponevasi avere in A, perchè è ad AC proporzionale, nulla diviene, e così l' equazione delle ritrovate velocità nel punto B, $u=\sqrt{x^2-a^2}$, risulterebbe $u=x$, o sia che ivi starebbero come le forze istesse del punto B, ed il tempo impiegato verrebbe $dt=\frac{dx}{x}$, così che integrando riesce $t=lx$.

SCOLIO I.

134. Sembra, che nelle già dette precedenti ritrovate velocità, e tempi ci guidi il calcolo a conseguenze assurde; perchè se la forza produttrice del moto, posto il grave nel centro, divien nulla, come possibil sarà mai esser lungi da questo respinto in vigor d' essa, a segno che poi

nel punto B, come poco avanti fu ritrovato, abbiali comunicata velocità $= x$, e ſimilmente abbia ivi come x pure altrettanto di forza acquiſtata, quantità vera, e reale? Eſſendo ella prima in un caſo $= o$, quando vogliaſi, che conſecutivamente abbia il potere, in qualche altro punto della retta CB, produrre celerità nel mobile, ſeguir dee da tal poſizione, che dopo d' eſſerſi a niente ridotta, capace non oſtante ſi renda per produrre reale effetto; o dovrà dirſi almeno, che nuovamente di poi riaſſuma l' eſiſtenza, o vogliam dire, che ricreata ſiaſi per ſalto, in qualche altro punto fuor d' eſſo centro. Il che ammettendo contraddizione nell'ordine della Natura, potrà dunque aſſerirſi, che celerità prodotta non può eſſervi, dove non avvi potenza, nè conſeguentemente tempo alcuno impiegato nello ſcorrerſi ſpazio può egli eſiſtere; laonde impoſſibile il moto in queſta forma ſoltanto riguardato.

Il difetto però di darci realmente sì l' una, che l' altro, non cade nella fallacia del Calcolo, ma bensì nella ſuppoſizione aſſurda fatta in tal caſo; mentre non può eſſer mai $a = o$, ſecondo che fu ſuppoſto, quando ancora egualmente non ſia $x = o$; ed in fatti nella condizione iſteſſa del Problema, deve eſſere la forza del punto A, a quella del punto B, come la diſtanza CA alla diſtanza CB; cioè $F : f :: a : x$; onde $\frac{fa}{F} = x$, e fatta $a = o$, viene $x = o$; ed allorà ſi avrà dall' equazione $u = \sqrt{x^2 - a^2}$, nel punto B, $u = o$, come in realtà ciò deve eſſere; ed introducendola nella formula de' tempi, vien $dt = \frac{dx}{o} = \infty$, cioè il tempo infinito riſulta, come certamente infinito eſſer dee, perchè non par-

partirà il mobile mai dal punto C, per esser ivi di potenza spogliato.

COROLLARIO I.

135. Se dal centro si mova con qualche data velocità $= U$, di già in B l'equazione integrata, verrà la stessa, che sopra $A + \frac{x^2}{2} = \frac{u^2}{2}$, ma fatto $x = o$, viene $u = U$; sicchè la costante si ritrova $A = \frac{U^2}{2}$, e sostituita, risulterà $u = \sqrt{U^2 + x^2}$.

136. I tempi altronde saranno $dt = \frac{dx}{\sqrt{U^2 + x^2}}$, ed integrati, vengon proporzionali al doppio del Settore iperbolico CSA, come nel Problema già furono, ma quì ritrovato per la Segante, conforme apparisce dall' Algebra; e questo si è il caso, in cui il moto è possibile, mentre quantunque in C collocato il mobile dal supposto non debba aver forza, vi ha della velocità però, per la quale può egli eseguirsi.

COROLLARIO II.

137. Restando l' ipotesi di velocità data, ed il partire dal Centro C, suppongasi che 'l mobile giunto in B, privo ivi sia, ovvero estinta venga la velocità iniziale già detta, di maniera che abbiasi $U = o$, viene allora $u = x$; ed ecco quando la velocità sta come la forza, e per conseguenza è il tempo $dt = \frac{dx}{x}$, o sia per l' intiero, integrando, $t = lx$, che è tempo effettivamen-

mente proporzionale a quantità assegnata, perchè essendovi velocità, fa duopo esservi pure il tempo, in cui questa s' acquista; e con ciò dimostrasi che soltanto è possibile il moto quando non avvi forza, se affetto d' una tal quale velocità pongasi essere il grave nel suo principio.

SCOLIO II.

138. Poichè due furono i canoni stabiliti riguardanti il modo da maneggiarsi l' affezioni de' movimenti, ed uno di essi, quale è della forza nello spazio, avendosi già veduto praticato ne' passati casi; resta da far vedere la pratica dell' altro, cioè della potenza congiunta nel tempo, per estendere intieramente le presenti trattazioni, il che fatto verrà brevemente. Quindi siccome ne' precedenti problemi dal valore alla forza assegnato, alle distanze, o spazj da scorrersi proporzionale, e velocità, e tempo sonosi ricavati; così facendo uso dell' altra formula, posciachè non lo spazio, ma il tempo dovrassi assumere, come distanza, a cui la ragion delle forze sia riferita, verrà per conseguenza a ricavarsi le celerità parimente, ma gli spazj poi in luogo de' tempi saran essi che risultar deono, conforme vedrassi.

PROBLEMA III.

Tav. 3. Fig. 2. *Partendo dalla quiete il grave dal punto A, verso il centro delle forze C, e stia la forza centrale in A, alla forza in qualsivoglia altro punto B, direttamente come AC, a BC distanze dal centro; assunte per i tempi da trapassarsi, ritrovare e velocità, e spazj.*

139.

139. Resti come sopra $AC = a$, ed il tempo del grave giunto in B, cioè $AB = t$, e lo spazio, che abbia in questo tal tempo scorso $= s$, ed il tempo da trapassarsi $CB = z$; onde sia $t = a - z$, e $dt = -dz$. La formula ch' a questo fatto compete, num. *66.* $fdt = du$, riesce $-fdz = du$, sostituendovi; e perchè la condizione ci porge che $f = z$, quindi hassi $-zdz = du$, e coll' integrare, $-\frac{z^2}{2} + A = u$; e comecchè fatto $u = o$, vien pure $t = o$, e $z = a$, e perciò la costante $A = \frac{z^2}{2}$, onde $u = \frac{a^2 - z^2}{2}$ sarà la velocità, che cercasi.

140. Da quanto si ha, che $ds = udt$, dedurrannosi gli spazj eziandio, surrogandovi in vece di dt il suo valore $-dz$, e le precedenti stabilite celerità; e risulteranno $ds = \frac{z^2dz - a^2dz}{2}$; e sommando $A + s = \frac{z^3}{6} - \frac{a^2z}{2}$; e posciachè ritrovasi $t = o$, e $z = a$, quando $s = o$, sicchè $A = -\frac{a^3}{3}$, e per conseguenza $s = \frac{z^3 - 3a^2z + 2a^3}{6}$, che sono i ricercati spazj dati per la costante a, e per i tempi assunti.

C O R O L L A R I O I.

141. Pervenuto nel centro il grave cadente, poichè hassi $z = o$, la sopra esposta celerità verrà allora $u = \frac{a^2}{2}$, e gli spazj altresì $s = \frac{a^3}{3}$. Se poi non dalla quie-

quiete a moversi principiasse, ma bensì con data velocità, tutto farebbesi come poco anzi.

COROLLARIO II.

142. Per riprova della aggiustatezza delle passioni sopra inferite, fingasi ch' il corpo posto sia nel punto *A*, principio del movimento, dove è affetto d' infinita tardità, come di già vien supposto, poichè allora $z = a$, la velocità viene $u = o$, come esser dee; e gli spazj parimente $s = \frac{a^3 - 3a^3 + 2a^3}{6} = o$; mentre non avendosi velocità, non può in conseguenza nè meno esservi spazio scorso.

S' ommette esaminarne le leggi d' allorchè repulsiva venisse presa la forza, poichè l' equazioni in null' altro varierebbero che nella mutazione de' segni, ed avendosi sopra esaminato il metodo, superfluo sarebbe farne parola.

CAPITOLO IX.

Del moto nella Cicloide.

AL moto esaminato ne' precedenti problemi è simile, e della natura stessa quel moto, che nella Cicloide scorrendo il grave, producesi; quindi è, che non sarà fuor di proposito trattar della medesima la teorica, per quanto che alle leggi, e passioni del suo movimento appartiene. La Cicloide si è una tal curva, ch' in se

se racchiude portentosi ritrovati, e certamente che fra le curve fino ad ora a noi note, una non v'è, che simile a questa contenga proprietà tali, che quanto sono ammirabili, altrettanto eziandio, per le cose *fisico-matematiche* utili, e necessarie. Parte di queste dall' inventore di essa Galileo Galilei il sommo, sviluppate ne furono, che diffusamente poi, e dottamente insieme dal celebre Eugenio, nel suo Orologio Oscillatorio, sono state ampliate, ed altre di nuovo rinvenute. Giovanni Bernoulli il grande, l'acutissimo geometra Pad. Grandi, ed altri, anch' essi ritrovate pur ve ne hanno, che d'ammirazione son degne. Per quello però ch' al fatto presente appartiene, di quelle proprietà soltanto farassi menzione, che correlative al corpo in essa mosso elleno sono, le quali per chiarezza maggiore nel seguente esempio indicate verranno.

E S E M P I O.

143. Sia la retta AK, sopra cui posato venga il circolo DST, se di poi trasportato con il punto T, sopra il punto A della retta accennata suppongasi, e che uniformemente sopra di essa facciasi rotolare, fino a tanto che il mentovato punto T vada a posarsi, e combaciare nel punto K, vedesi manifestamente che con tale funzione avrà la curva ATK disegnata; la quale per appunto è quella, che Cicloide vien nominata. In oltre, poichè secondo il divisato andamento, il prefato cerchio esattamente misura tutta l'intera retta AK, si denomina perciò in ispecie la curva, la Cicloide ordinaria, e della quale soltanto s'intende presentemente parlare. Questo tal circolo, ch'a descriverla è stato adoprato, cerchio genitore, la retta AK, ba- Tav. 3. Fig. 4.

ſe della Cicloide, e *T* vertice della medeſima da' matematici nominatamente s' appellano.

144. Dall' andamento di queſta ſua accennata generazione ſcorgeſi, che tirata una qualunque retta *NQ* parallela ad *AD*, l' interpoſta *NS* avrà all' arco *ST* quella ragione medeſima, che la retta *AD* ritiene col ſemicircolo *DST*, o vogliam dir quella, che tutta l' intiera *AK* ha col circolo genitore; ma *AK* è ad eſſo eguale, ed *AD* per conſeguenza eguale pure al ſemicircolo *DST*, dunque ſimilmente $NS = ST$, arco circolare; che ſi avrà per una delle proprietà al caſo preſente neceſſarie.

145. Da' Metodi cogniti per ritrovar Tangenti, ſi ſa, che condotta dal punto *N*, eſtremità della intercetta *SN*, la retta *NM* parallela alla Corda *TS*, ſarà queſta la tangente in tal punto, proprietà pure delle neceſſarie da conſiderarſi.

146. E noto eziandio per la rettificazion delle Curve, che l' arco Cicloidale *NT* ſi è doppio della Corda *TS*, ſuttendente dell' arco di circolo *ST*; e la Semicicloide *AT* conſeguentemente doppia del diametro *DT*. Tali proprietà indicate per intelligenza di quello, ch' avraſſi a trattare, ſi premetterà il ſeguente.

L E M M A.

Tav. 3. Fig. 5. 147. In una Curva, o piano inclinato *BNC* neceſſitato ſia a far viaggio un mobile, che dotato venga d' una potenza, o forza in qualunqe maniera concepita, tendente verſo del centro *A*. Suppoſto il Centro detto in immenſa, o infinita diſtanza lungi dalla baſe della Curva *BK*, le direzioni delle forze, in ciaſchedun punto ſarà permeſſo concepirle ſempre e parallele fra loro, ed all' aſſe

CK

KC parimente; il grave in *N* ſuppoſto, la forza di eſſo ivi data e verſo *NS* tendente, per la retta *ND* eſprimaſi; in oltre nel punto di Curva *N* ſi tiri la Tangente *NT*, di poi dal punto *D* conducaſi alla detta *NT*, la perpendicolare *DT*; per la riſoluzion delle forze è chiaro dalla Statica, che la potenza *ND* ſi può in due equivalenti riſolvere, cioè nella *NT*, e *DT*, come più diffuſamente ſi vedrà nel Libro ſecondo, parlando del moto curvilineo libero. La *DT* non altro fa, che premer la curva, della applicazion della quale ad altro luogo ci riporteremo parlarne, e niente ſi conſidera per le illazioni, che al preſente ſi dedurranno; di maniera che la ſola forza *NT*, che *tangenziale* vien detta, ſarà quella, di cui è affetto il mobile nel punto *N*; cioè queſta ſola ſarà eſſa, che per la curva l'accelera, e queſta ſola per conſeguenza avrà l'applicazione nelle paſſioni del movimento. La cura *BNC* ſi aſſumerà altresì per lo ſpazio, o tempo, ſecondo che più piace a propoſito, mentre condotta la *SH* infinitamente vicina, l'elemento *NH*, che con la tangente pareggiaſi, ſarà deſſo ove anderà applicata la forza, la quale, la direzione ſteſſa del moto ritiene; e però, conforme del rettilineo ſi è ſopra parlato, così in queſto neceſſitato curvilineo militeranno le leggi ſteſſe.

PROPOSIZIONE VII.

Eſſendo neceſſitato un mobile di camminare nella Cicloide, le forze in un qualſiſia punto, ſtanno come le lunghezze, o ſpazj da ſcorrerſi fino all' infimo punto della medeſima. Tav. 3. Fig. 6.

148. Deſcritta ſia adunque la Semicicloide *ASE*, ſopra la quale neceſſitato a ſcorrere il grave, di poten-

za costante dotato, e paralellamente diretta, dal punto A dalla quiete partito, fino in B sia di già pervenuto, scorrendo verso l' infimo punto E, della Curva accennata. Si conduca BQ parallela alla base AN, e dal circolo genitore, dove questa lo sega, e dal vertice E si tiri la corda HE; proseguendo il corpo il suo viaggio, e giunto in S, ivi pure si conduca la parallela SK alla stessa AN, e la corda OE similmente. Dalla proposizione adunque si vuol provare, che le forze del grave nel punto B, stanno all'altre del punto S, in quella ragione della lunghezza BE alla lunghezza SE; il che così si dimostra.

Facendosi la direzion del mobile nel punto B per la tangente BL, Lemma precedente, e la tangente della curva parallela essendo ad HE num. 145. accaderà dunque, per rapporto alla di lui tendenza, come se diretto fosse pel piano istesso HE; o vogliam dire, che sul punto B sarà lo stesso; come se nel punro H; del piano inclinato HE fosse egli collocato. Nel successivo punto S, per la ragione medesima, avrassi come se esistesse nel punto O dell' altro piano OE; ma per la teoria de' piani inclinati si ha, che la forza nel punto già detto H, sta come HE; e per legittima illazione nel punto O, come OE, dunque del mobile nel punto B, e nel punto S, perchè è lo stesso, che esistesse in H, ed O, saranno le forze come HE ed OE, cioè anche come $2HE$, e $2OE$; quindi una detta F, e l' altra f, perchè num. 146 $2HE = BE$, e $2OE = SE$, si avrà $F : f :: BE : SE$, cioè le forze come gli spazj da trapassarsi, che è quanto si propose di dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

149. Si può notare da questo Teorema, che quantunque la potenza siasi presa uniforme, nulladimeno scorrendo il grave la Cicloide, in diversi punti di essa, di diversa forza centrale resta affetto; dunque ancorachè l' ipotesi del Galileo d' esser la gravità invariabile, fosse la vera, si danno de' casi, dove nel trapassare spazj curvilinei la forza costante equivale a forza variabile; e questo deriva, non perchè soltanto dalla quiete se ne trapassi al moto, onde in vigor di sola forza viva dir si possa che ciò succeda, ma bensì dalla inclinazion della curva all'Orizzonte, che inclinata in tal forma fa, che in varj punti d' essa trapassando il mobile, venga così la forza modificata, effetto veramente, che d' ammirazione si è degno.

PROBLEMA I.

Movendosi nella Cicloide un Corpo, si ricercano le velocità, ed i tempi, in qualsivoglia punto di essa. Tav.4. Fig. 1.

150. Nella Semicicloide ABC stia un mobile in quiete nel punto A, d' una forza costante dotato, e secondo che già abbiam notato antecedentemente, sia questa la gravità sopra la superficie della Terra. Partendosi verso dell' infimo punto C, arrivato in B, sia lo scorso spazio $AB = s$, e l' altro da scorrersi $BC = x$, e la gravità che ivi con direzione parallela lo spinge, sia rappresentata per la retta $BQ = g$, ed il diametro NC del cerchio genitore $= a$; in oltre dal punto B conducasi la tangente BT, e su questa dal punto Q s' innalzi la perpendicolare QO; condotta la BL alla base AN parallela, dal punto dove sega questa il circolo,

colo, si tiri la corda DN, e l' altra DC. I Triangoli NCD, QBO è noto essere simili, per lo che starà $NC : CD :: QB : BO$, ed i termini analitici surrogando, avrassi $a : CD :: g : BO$, ma la sottentende $CD = \frac{x}{2}$ num. 146., onde $BO = \frac{gx}{2a}$, sarà l' espressione della forza *tangenziale* necessaria introdursi, come nel precedente Lemma fu avvertito. Presa pertanto la nota formula delle forze applicate allo spazio $AB = s$, le velocità nello scorrersi $= u$, si avrebbe ivi, prendendo lo spazietto minimo, $fds = mudu$; ma quì viene $f = \frac{gx}{2a}$, e $ds = -dx$, laonde la legittima espressione sarà $-\frac{gxdx}{2a} = mudu$, che integrandola poi, ne verrà $A - \frac{gx^2}{4a} = \frac{mu^2}{2}$; la costante si fissa col supporre il corpo in A, dove $u = o$, ed $x = CA = 2a$, num. citato, onde $A = ga$, e sostituendo, col ridurre l'equazione, sarà $\frac{g}{2am} \times \overline{4a^2 - x^2} = u^2$, e cavando la radice, $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2ma}} \times \sqrt{4a^2 - x^2} = u$, cioè la velocità ricercata nel punto B esposta, come vedesi, per un ordinata al circolo.

151. Il tempo impiegato si avrà dalla solita formula $dt = \frac{ds}{u}$, perchè sostituendovi in luogo delle velocità u, le antecedenti ritrovate, come pure in luogo di ds il suo valore $-dx$, ne verrà integrando, $t = \frac{\sqrt{2ma}}{\sqrt{g}} \times \int \frac{-dx}{\sqrt{4x^2 - a^2}}$, espresso per un arco circolare,

come

come ſopra fu ritrovato num. 119.

COROLLARIO I.

152. Facciaſi la ſuppoſizione, che tutta la Semicicloide, trapaſſata abbia il grave, onde nell' infimo punto C per conſegueza ritroviſi, ſarà $x = o$; quindi le velocità ſuddette vengono $u = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2ma}} \times 2a$. Avendoſi in oltre che $AB = s = 2a - x$, ſarà in tal caſo $s = 2a$ lo ſpazio finito nel diviſato punto C. Si prenda adunque la formula num. 31. $2s = ut$, e ſurrogandoſi le velocità, ne riſulta $t = \frac{2\sqrt{2ma}}{\sqrt{g}}$, per lo tempo in tutta la Semicicloide impiegato.

O pure perchè $dt = \frac{ds}{u}$, ponendovi in luogo della velocità quella quì ſopra ritrovata, ed avraſſi $dt = \frac{ds\sqrt{2ma}}{2a\sqrt{g}} = \frac{ds\sqrt{m}}{\sqrt{2a}\sqrt{g}}$; ma ſe in C ſia il mobile ſi vide, che $s = 2a$, ſicchè $dt = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g}} \times s^{-\frac{1}{2}} ds$, ed integrando ſenza addizione di coſtante, perchè fatto $t = o$, viene egualmente $s = o$, ritroveraſſi $t = \frac{2s^{\frac{1}{2}}\sqrt{m}}{\sqrt{g}}$, e reſtituendovi in luogo di $s^{\frac{1}{2}}$ il ſuo valore $= \sqrt{2a}$, vien finalmente $t = \frac{2\sqrt{2ma}}{\sqrt{g}}$, come ſopra.

CO-

COROLLARIO II.

153. In altro punto della quiete nell' isteſſa Curva ſuppongaſi principiare il moto ſuo il corpo già detto, e ſia queſto io K, e lo ſpazio cicloidale $KC = b$; arrivato in B, ſia come ſopra $CB = x$, e tutto reſtando, e raziocinando come nel Problema antecedente, l'equazione ſarà la ſteſſa integrata $A - \frac{gx^2}{4a} = \frac{mu^2}{2}$; ma varierà la coſtante da aggiugnerſi; e perciò fatta $u = o$, diviene $x = KC = b$, ed $A = \frac{gb^2}{4a}$, così che ſoſtituendola, vien ridotta l' equazione ad eſſer la ſeguente $\frac{gb^2 - gx^2}{2a} = mu^2$, cioè $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2ma}} \sqrt{b^2 - x^2} = u$. Si ritrova il tempo colla formula isteſſa di ſopra, chiamato lo ſcorſo ſpazio $KC = s = b - x$, onde $ds = -dx$, dunque e queſto valore, e le velocità antecedenti ſurrogando, ſi avrà $dt = \frac{\sqrt{2am}}{\sqrt{g}} \times \frac{-dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, eſſendo eſpreſſo come ſopra per l' iſteſſo arco circolare, non variando altro, che il raggio.

COROLLARIO III.

154. Giunto dal punto K fino all' infimo C il mobile, ſarà per conſeguenza $x = o$, dunque le ritrovate velocità in queſta ſuppoſizione ſaranno $\frac{\sqrt{g} \times b}{\sqrt{2ma}}$; Il tempo poi prendendoſi come ſopra $2s = ut$, e in luogo di

di u, questa velocità ritrovata surrogandosi, s' avrà $2s = \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{2ma}} \times b$, e perchè $s = b - x$, e nell' ipotesi presente $x = o$, ci dà adunque $s = b$, che vale a dire, che col sostituire in luogo di s, avrassi $t = \frac{2\sqrt{2ma}}{\sqrt{g}}$; cioè il tempo intiero della caduta dal punto K fino in C si è lo stesso del num. 152. d' allorchè fu supposto, che da A fino all' istesso punto C fosse il mobile pervenuto; e così si conclude, che da qualunque luogo, che nella Cicloide principj il grave a discendere allorchè sarà nel vertice arrivato i tempi saran costantemente tutti eguali fra' loro, chiamati generalmente tempi *Isocroni*; o pure riferendo il moto al pendolo, ch' in essa vibri, diconsi come più a basso vedremo, del medesimo le vibrazioni *equidiuturne*; quale è una della proprietà ammirabili di questa Curva.

COROLLARIO IV.

155. Dall' aversi dedotto alla Proposizione 7. che le forze nella Semicicloide stanno fra loro come gli spazj da scorrersi fino all' infimo punto della medesima, si conchiude ch' il fatto si è lo stesso, come se il corpo con le condizioni del num. 118. si dirigesse, cioè, come se la semicicloide si estendesse in una retta linea AC, e che da i due respettivi punti A, e K partendo il grave avesser le forze la ragione fra loro, che le altezze AC, KC; come di fatto in questa sonosi osservati i tempi dell' intiere cadute *isocroni*, benchè da diverse distanze, ciò, che puntualmente con le leggi Tav. 4. Fig. 2.

 inse-

inferite al num. 128 concorda, e ſimilmente eziandio in tutto altro queſto con quel moto al num. 118 eſaminato, eſattamente converrebbe.

S C O L I O.

156. Il moto nella Cicloide fino ad ora è ſtato riguardato in quell' aſpetto, come ad eſeguirſi neceſſitato, laſciando a parte la conſiderazione del che, e come tal neceſſità ne provenga. Per tanto per render completa la teoria di un movimento, che ſerve ad utiliſſimi uſi, non ſarà fuor di propoſito di deſcrivere con quali mezzi deſſo poſſa eſeguirſi.

E S E M P I O I.

Tav. 4. 157. Sia perciò un ſottiliſſimo filo *FC*, in aſtratto
Fig. 3. conſiderato d' ogni gravità privo, e di perfetta fleſſibilità dotato nel punto *F*, cioè che non ſoffra alcuno, ſtrofinamento, o *attrito*, come altri dicono, per ivi liberamente aggirarſi. Nella ſua eſtremità *C* ſiavi ſoſpeſo un mobile *m*, il quale nella ſemicicloide *AC* ſe ne ſcorra, un tale ſtrumento egli è quello, che Pendolo diceſi, e ch'il moto accennato eſeguiſce. Spinto così dal punto *A* dalla gravità ſua verſo *C*, trapaſſato in tal forma la ſemicicloide *AC* già detta, rimoſſa ogni reſiſtenza di mezzo, il che vien ſuppoſto, in vigor della acquiſtata velocità, o concepito impeto, è noto per le coſe meccaniche, ch' in *C* arrivato, monterà altrettanto, e ſia per cagion d' eſempio fino al punto *B*, deſcrivendo con tal moto un' altra parte ſimile di curva *CB*, la quale poi tutta intiera forma la Cicloide *ACB*; dal punto *B* reciprocamente poi ritornando, in vigor dell' iſteſſo diſcor-

ſo in

ſo in A, il moto così delineato è quello, che per appunto oggidì da' Meccanici moto *oſcillatorio*, o pur vibrazione del pendolo, comunemente s' appella; e ciò ſi può dire ancora del moto in qualunque altra curva prodotto, che di due archi ſimili coſtrutta ſia. L' applicazione de' tempi uguali, o *iſocroni* delle diverſe cadute, già poco fa accennati, riguarda, come chiaramente vedeſi, che, o ſia dal punto A, o dal punto S qualunque, da cui a vibrare principj il pendolo, allorchè ſarà in C pervenuto, tempi uguali vi avrà queſto impiegati. Dal punto A ſino in C diſceſo, rimontando ſino in B, v' impiegherà altrettanto tempo, che della ſceſa; dunque ne dee ſeguire che l' intiero per tutta la Cicloide AB, doppio ſia del tempo per l' AC metà della medeſima; così pure dal punto S partendo, giunto in C rimonterà nell' altra porzione CQ eguale ad SC, impiegandovi il tempo ſteſſo, e l' intiero dipoi per SQ doppio, ſarà di quello per SC; ma le metà di tali tempi per AC, ed SC ſono eguali num. 154.; Dunque ancora il doppio di eſſi dovrà eſſere eguale per conſeguenza, cioè l' *oſcillazioni*, o vibrazioni del Pendolo nella Cicloide ſaranno equidiuturne.

COROLLARIO I.

158. La velocità del già deſcritto Pendolo ſuol chiamarſi quella tale, di cui il corpo *m* viene affetto, giunto dal punto A fino in C.

COROLLARIO II.

159. La velocità angolare poi chiamaſi quella diſegnata per l' angolo SFC, con la quale s' aggira il

M 2 Pen-

Pendolo attorno al punto di sospensione *F*.

Delineata la descrizion dello Strumento, che nella Cicloide il moto del corpo produr deve, resta finalmente adesso a determinarsi, con qual legge, e come debba costruirsi acciò effettivamente adempia in questa le sue vibrazioni, che è per l'appunto il prescrivere quella tale necessità del movimento presentemente supposto.

ESEMPIO II.

160. Per tanto pongasi, che nel punto *K* venga attaccato un filo, il quale senza soffrir distrazione, teso sia sopra la Lamina *KA*. Dal punto *A* principj questo a svilupparsi di punto in punto successivamente fino in *S*, a segno che da un tale svolgersi abbiasi prodotto il Segmento di Cicloide *AS*; cioè lo sviluppato filo *KS*, dal punto *A* abbia scorso nella Cicloide con la sua estremità fino in *S*. Da tale andamento ne nasce, come vedesi, che ritrovandosi cosa debba essere il filo *KS* predetto nel punto *S*, e la Lamina *KA*, da cui viene svolto, di quale specie sia, si avrà ritrovata pure la maniera di far necessariamente scorrere il pendolo nel detto Segmento *AS*, o in qualunque altro, che prendasi nella Semicicloide *AC* a considerare. La lamina, da cui svolgesi si chiama l' *Evoluta* della generata curva; il filo sviluppato il raggio dell' *osculo*, o *osculatore*, secondo le note voci dell' Algebra, che al fatto presente per appunto è quello, ch' in pendulo vien convertito, e perciò mi proporrò trovarlo nella forma seguente.

PRO-

PROBLEMA II.

Ritrovare il raggio osculatore in un punto qualunque della Cicloide.

161. Sia dunque il punto S della figura citata, dove vogliasi il raggio osculatore KS; condotta da cotal punto alla base AH la parallela SD, si chiami $CD = x$, ed il diametro del cerchio genitore $HC = 2a$, e $DS = y$; l'equazione differenziale della Semicicloide AC costa, che viene $dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}\sqrt{2a - x}$; la quale di nuovo differenziata col ritenere dx costante, risulta $ddy = \frac{-a\,dx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$. Per ritrovarsi il raggio con un metodo ordinario, e sia quello particolarmente notato nell' Algebra della dottissima Signora Contessa M. Agnesi, qualora facciasi dx costante, la general formula del medesimo riesce $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy} = KS$, e sostituendovi il valore della seconda differenza di già dall' equazion della Curva sopra stabilita, si ha $KS = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{a\,dx^2} \times x\sqrt{2ax - xx} = \frac{x}{a\,dx^2}\sqrt{dx^2 + dy^2} \times \overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{2ax - xx}$. Ricavasi parimente dalla sopraddetta equazione, che $dy^2 = \frac{2a\,dx^2 - x\,dx^2}{x}$, per lo che surrogando in ambedue i luoghi, dove dy^2 ritrovasi, risulta $KS = \frac{x}{a\,dx^2}\,\frac{\sqrt{2a\,dx^2}}{\sqrt{x}} \times \frac{2a\,dx^2}{x}\sqrt{2ax - xx} =$

$\frac{2\sqrt{2a}\sqrt{2ax-xx}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{4aa-2ax}$. Ma condotta da dove la ſegante taglia il circolo la retta OH, ed in oltre la Corda OC, dall' equazione del Circolo ricavaſi, che $HO = \sqrt{4aa-2ax}$, o vogliam dire eguale alla metà del ritrovato raggio, oſculatore, così che $SK = 2HO$; e di punto in punto ricercandolo, tale ſi ritroverebbe, poichè la formula ſempre è ſtabilmente l' iſteſſa; onde il raggio al doppio della corriſpondente corda diviene proporzionale.

COROLLARIO I.

162. Ricercandoſi nel punto A prima dello ſvilupparſi del filo, diviene $x = CH = 2a$; e perciò tal valore ſoſtituito nell' eſpreſſione del ritrovato raggio, verrà $SK = o$, come effettivamente tale dovrà eſſere non eſſendoſi per anche il filo in alcun punto ſviluppato.

COROLLARIO II.

163. Se nel punto C infimo della ſemicicloide ricercaſi, haſſi in tal caſo $x = o$, così come ſopra nel raggio trovato ſoſtituendo, diverrà $SK = 4a$; vale a dire che ſarà queſto doppio del diametro del circolo genitore; ſicchè prolungato HC fino in F, a ſegno che ſia $FH = CH$, ſarà FC la quantità del filo, o ſia il raggio in tal punto. Venendo perciò deſſo proporzionale al doppio della corda num. 161. e quì non potendoſi più eſſa eſtendere, perchè ſi è alla maggior ſua grandezza arrivata, qualora diviene il diametro la corda iſteſſa, ed in A aven-

avendosi visto, Coroll. antecedente, essere $= o$, dunque l'evoluta della semicicloide dal punto A principia, ed in F termina. L'istesso discorso poi militerebbe, se dell' altra semicicloide BC si ricercasse; onde è, che FB sarà l' altra evoluta sua, ed alla AF similissima parimente.

COROLLARIO III.

164. Il filo svolto dall' Evoluta FA, si è nell' ipotesi presente all' istessa evoluta eguale, poichè nè più nè meno da essa se ne avvolge; ma l' intiero filo, o raggio Coroll. antecedente si ritrova $= 4a$; cioè al doppio del diametro del Circolo, e la semicicloide AC risulta parimente tale num. 146.; dunque l' evoluta AF viene eguale alla semicicloide stessa AC, e fra loro similissime parimente, posciachè fra due punti, che egual distanza frappongono ambedue racchiuse si trovano, e perciò nient' altro sarà l' Evoluta, che la medesima semicicloide AC ma inversamente situata, ed altrettanto dirassi dell' altra evoluta FB, e semicicloide BC dall' altra parte descritta.

COROLLARIO IV.

165. Dunque nel punto C l' intiero filo FC dalla sua Evoluta sviluppato in A cominciando, avrà generata, o scorsa con la estremità sua C la semicicloide AC nominata, e di quì rimontando verso A, aderendosi a questa di nuovo, ritornerebbe fino a tal punto, passando per il cammino medesimo; onde se sia un mobile m sospeso all' estremità del filo FC, eccone fatto il pendolo semplice, e determinato a eseguire il moto

suo

ſuo nella cicloide neceſſariamente, per l'avvolgerſi, e ſvolgerſi, che fa nell'evoluta vibrando ſe ſteſſo.

COROLLARIO V.

166. La Cicloide dove queſto le vibrazioni eſeguiſce, vien coſtruita ancora con modo meccanico, il quale aſſunto da molti Autori è ſtato diligentemente trattato.

COROLLARIO VI.

167. Se il punto di ſoſpenſione *F* divenga centro d'un deſcritto Circolo, il di cui raggio ſia *FC*, l'arco minimo, che paſſerà per lo punto *C* verrà con la Cicloide ivi a pareggiarſi, e confonderſi; e ſe più, e più il predetto raggio s'allunghi, e minore l'archetto circolare divenga, maggiormente ſempre inſieme combacieranno, a ſegno che un tal circolar Segmento, come cicloidale potrà riguardarſi, le di cui vibrazioni affette ſaranno dalle paſſioni medeſime già ſopra eſpoſte. Ne' Pendoli, che comunemente ſon coſtruiti, all'eſperienza pure ſenſibilmente compariſcono eguali le vibrazioni in archi circolari piccoli eſeguite. Ed il Galileo primo oſſervatore d'un tal fenomeno, credeva, che in archi qualunque, iſocrone eſſer dovevano, e come tali le applicava in varie miſure, per la coſtruzione da lui fatta di quel ſuo noto Orologio. Ma l'inſigne ſopraccitato Geometra Criſtiano Ugenio perfezionando poſteriormente queſto Strumento con tanto vantaggio delle Scienze Fiſico-Matematiche, nel libro del moto de' pendoli, dimoſtrò, che in rigore geometrico, per eſſer le *oſcillazioni* equidiuturne sì ne' piccoli, che ne' grandi archi, nella

nella Cicloide, e non nel circolo fa duopo vibrarsi il Pendolo.

COROLLARIO VII.

168. Per dedurre diverse illazioni dal moto già accennato provenienti, facciasi, ch' i Pendoli vibrati sien due; e siccome uno considerandosi, si ritrovò il tempo suo espresso, nello scorrer la Semicicloide, num. 152. per $t = \frac{2\sqrt{2am}}{\sqrt{g}}$; l'altra simile dipoi salendo s'esprimerà conseguentemente il tutto insieme per $t = \frac{4\sqrt{2am}}{\sqrt{g}}$, num. 156. Così pure applicando le considerazioni medesime per l'altro supposto Pendolo, denominando con le majuscole le quantità ch'annovi luogo, avrassi $T = \frac{4\sqrt{2AM}}{\sqrt{G}}$, per le totali sue vibrazioni.

COROLLARIO VIII.

169. Fatti per tanto i rapporti fra le due mentovate equazioni sarà $T : t :: \frac{\sqrt{2AM}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{2am}}{\sqrt{g}}$, cioè i tempi degli scorsi pendoli nelle respettive cicloidi, o archi circolari con queste confusi, stan fra di loro in ragion sudduplа composta de' diametri, ovvero raggi, o sia delle lunghezze del pendolo, perchè co' diametri han proporzione, e della massa, e nella reciproca sudduplicata delle gravità.

COROLLARIO IX.

170. Facendo $G=g$, e disuguale il restante, avrannosi $T:t::\sqrt{2AM}:\sqrt{2am}$, che sono i tempi nella sudduplicata composta de' diametri, e delle Masse.

COROLLARIO X.

171. Suppongasi essere nella cicloide istessa vibrati i Pendoli, cioè i fili eguali, come pure $G=g$, vengono $T:t::\sqrt{M}:\sqrt{m}$, vale a dire i tempi in ragion sudduplicata delle Masse.

COROLLARIO XI.

172. Essendo $M=m$, e $G=g$, stanno allora $T:t::\sqrt{2A}:\sqrt{2a}$, cioè nella sudduplicata delle lunghezze, o fili de' pendoli; e queste tali lunghezze fatte eguali, i tempi pure saranno in ragion d' uguaglianza; ch' in effetto così esser deve, perchè le condizioni racchiudono l' ipotesi ch' il Pendolo un solo egli sia.

COROLLARIO XII.

173. Fatta $M=m$, e $2A=2a$, ma ineguali le gravità, avrassi $T:t::\frac{1}{\sqrt{G}}:\frac{1}{\sqrt{g}}$, quindi i tempi in ragion reciproca sudduplicata delle gravità stesse. Questa supposizione, spiega che la lunghezza de' Pendoli, o pur la Cicloide, sia la medesima, e la quantità di materia d' ambedue i corpi vibrati, eguale, anch' essa, ma che sotto tale egual massa siavi diversa gravità; onde ne

ne verrà, ch' i prefati tempi alle gravità debbano aver la loro proporzione. E' bene aver notate le condizioni di questo Corollario, a proposito di ciò, che verrà ad inferirsene nel seguente numero.

SCOLIO I.

174. Supposto per tanto che vibrato sia un Pendolo, per esempio a Parigi, e la durata, o tempo d' una sua vibrazione sia stata un minuto secondo, o qualche altra precisa misura; e di poi lo stesso, in altro luogo si vibri, per cagion d' esempio nell' Isola Cayanne, prossima all' Equatore, come in fatti per più esperimenti è stato così realmente fatto, e si ritrovi, che una tal sua vibrazione non corrisponda in durata di tempo a quella di Parigi già detta; combinandosi con questa esperienza la supposta ipotesi dell' antecedente Corollario, cioè della lunghezza del filo medesimo, e della stessa quantità di materia, la non seguita eguaglianza de' tempi delle vibrazioni, da altro non può procedere, che dalla variazione delle gravità sotto la massa medesima, in questi due diversi luoghi, poichè nel coroll. citato, a dessa gravità sonosi veduti i tempi avere la loro proporzione. Dunque questa esperienza ci dimostra, che la gravità muta valore a norma della mutazione de' luoghi, scoperta veramente degna d' ammirazione; e quantunque ancora, che ad altra cagione, ch' alla sua mutazione sotto la quantità di materia stessa compresa, ciò attribuir si volesse, come alcuni han pensato, un tal fenomeno nulladimeno è ammirabile dall' altro canto, il quale dalla diligenza de' soli Matematici, e Filosofi, nelle più recondite azioni della Natura vien ripescato.

SCOLIO II.

175. Essendo pertanto necessario per le osservazioni Astronomiche, di Nautica, e di Geografia, aversi di tali vibrazioni, in luoghi diversi, una misura stabile e ferma, cioè d' eguale durata, fa duopo ritrovarsi il compenso per ottenerla. Il che facilmente verrà fatto col maneggiare num. 168. i canoni fissati del tempo $T = \frac{4\sqrt{2.AM}}{\sqrt{G}}$, e $t = \frac{4\sqrt{2am}}{\sqrt{g}}$, poichè ponendosi di volere i tempi eguali fra loro, come altresì eguali le masse, cioè $t = T$, ed $M = m$, verranno le suddette equazioni espresse così $\frac{\sqrt{2.A}}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, o vogliam dire $G : g :: 2A : 2a$, cioè la gravità del pendolo in un caso, sta a quella dell'altro, come il respettivo raggio, o sia filo dell' uno a quello dell' altro; e perciò s' inferisce che la gravità con le semplici lunghezze del Pendolo ha proporzione, quandochè il tempo, e la massa vuolsi essere eguale. Dunque se questa accennata gravità, secondo che sopra si è divisato, sarà variata, persistendo la massa, o quantità di materia medesima, dovrassi altronde variare la lunghezza, o filo del pendulo. Ed eccoci pervenuti all' intento.

Ed in fatti il primo di tutti il Richer, che osservando ne' ricordati diversi Paesi la variazione della durata del tempo nelle vibrazioni, fu quello, che in effetto mutò dal Pendolo la lunghezza, per arrivare in tal forma alla bramata eguaglianza. Nell' Isola di Cayanne predetta necessario gli fu scortarla per ridurre i tempi di già detti a quelli di Parigi eguali, del Pendolo medesimo sempre intendendosi. Di poi all' Hallejo, ed in se-

ſeguito a molti altri, fu duopo fare altrettanto, ſempre però diminuir dovendo il filo ne' luoghi più meridionali, ed allungarlo allorchè a' più ſettentrionali accoſtar ſi doveſſero; come dal Lib. 3. de' Principj matematici del Newton alla Prop. 20. può da chiunque vederſi, dove tutte le loro oſſervazioni ivi ſon riportate, indicando parimente della diminuzione, e accreſcimento la particolare miſura.

COROLLARIO I.

176. Allungato adunque, o ſcortato il filo, ſecondo il biſogno, per averſi ſopra $G : g :: 2A : 2a$ ſi deduce, come la gravità fra di ſe ne' reſpettivi luoghi abbia la proporzione, dalla lunghezza del detto diametro, o filo; per eſſer queſto di data, e nota miſura; e ſiccome vicino all' Equatore diminuirlo biſogna, relativamente a' luoghi più al Polo vicini, la gravità, che con eſſo ha ragione, meno altresì avrà ivi di peſo ſotto la maſſa ſteſſa; e per conſeguenza pure avraſſi la preciſa differenza di eſſa da luogo, a luogo, dalla differenza nota delle reſpettive lunghezze.

CAPITOLO X.

Del Moto nel Circolo.

177. IN varie Curve, fuor della Cicloide poſſono eſſere indotti a neceſſità di ſcorrere i mobili, come altresì a vibrare in eſſe, coſtruendo con le reſpettive, e neceſſarie leggi, conforme le particolari circoſtanze richie-

chiedono; e così per farne vedere in alcuna altra, come sarebbe nel Circolo, gli andamenti de' corpi, e le loro particolari affezioni, essendosi ancor di più da molti altri un tal moto descritto, massimamente che prima de' tempi dell' Ugenio negli archi circolari i Pendoli praticavansi farli vibrare, si connetterà come affine all' antecedente, de' movimenti ne' ricordati archi la specifica teoria.

PROBLEMA I.

Tav. 4. Fig. 4. *Movendosi un corpo in arco circolare ritrovare la velocità, ed il tempo in qualunque punto di esso.*

178. Il Centro del Circolo sia C, ed il raggio, con cui vien descritto $CA = r$, si chiami $MA = b$, e supponendo dal punto N giunto il mobile in Q, si denomini lo scorso spazio $NQ = s$, e la velocità ivi acquistata $= u$, e da tal punto condotta l'ordinata QR, sia $AR = x$; la gravità costante, che con direzioni supposte parallele spinge il mobile cadente, venga indicata per la retta $QG = g$; sopra la tangente QO drizzando la perpendicolare GO, senza replicar le cose già dette al Lemma, che preceder si fece alla teorica della Cicloide, la forza QO sarà quella, in vigor della quale si accelera il mobile per la curva, cioè la *tangenziale* $= f$. Condotta di poi l' infinitamente prossima all' ordinata, cioè la PS, e di più al raggio parallela, la $TP = RS$, perchè l' x in vigor di questa si diminuisce, sarà perciò $TP = -dx$. Ciò supposto prendendosi la di sempre solita formula delle forze applicate allo spazietto $QP = ds$, avremo $fds = mudu$, i triangoli simili QTP, QOG ci danno, posti i termini analitici $g : f :: ds : - dx$, così dunque ade-

ad equazione riducendo, $-gdx = fds$, e sostituendo nella formula, avrassi $-gdx = mudu$. Si sommi, e viene $A - gx = \frac{mu^2}{2}$; supponendo poi, ch' il corpo sia nel punto N, dove viene $x = b$, ed $u = o$, per lo valore della costante, sarà $A = gb$; sicchè nient' altro rimane che surrogarlo, per aversi $u = \frac{\sqrt{2g.\overline{b-x}}}{\sqrt{m}}$, espressione delle ricercate velocità per lo punto Q, e per qualunque altro, che assunto si fosse,

179. Resta di ritrovare il tempo impiegato, lo che si ottiene dall' equazione $dt = \frac{ds}{u}$, che sostituendovi la velocità già ritrovata, si ha $dt = \frac{ds\sqrt{m}}{\sqrt{2g.\overline{b-x}}}$. Ma per l' archetto minimo $QP = ds$, venendo ritrovato per lo seno verso AS, come al presente si deve fare, si ha, che viene $ds = -\frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, onde finalmente si ridurrà, sostituendo un tal valore, $dt = \frac{-rdx\sqrt{m}}{\sqrt{2rx - xx} \times \sqrt{2g.\overline{b-x}}}$, la quale equazione indicherà i tempi infinitesimi, l' intieri poi per tutto l' arco NQ non potendosi avere, che per le serie, non essendo capace l' equazione d' essere altrimenti integrata.

COROLLARIO I.

180. Quantunque però ch' il tempo in termini finiti non possa ottenersi, per la ragione precedente riferi-

ferita, osservasi però apertamente, ch' essendo maggiore l' arco di cerchio trapassato, maggiore altronde diverrà il tempo suddetto, per ragione, che di valore aumentasi la quantità $MR = b - x$.

COROLLARIO II.

181. Per aversi la relazione delle velocità, e tempi in due respettivi archi circolari, fra loro simili, vaglia per un di questi il sopra nominato, e per l' altro sia il descritto $n\,a$ della fig. 5. Condotta la retta $a\,r$, all' altra $R\,A$ proporzionale, e similmente tutte le altre quantità a simiglianza degli archi prese sieno in ragione; ed alle lettere majuscole fatte eguali, nel punto q giunto il mobile, discorrendola come sopra nel Problema, sarà la velocità $U = \frac{\sqrt{2G.\overline{B-X}}}{\sqrt{M}}$.

COROLLARIO III.

182. Presa la formula, $dT = \frac{dS}{U}$, e surrogandovi in vece della velocità la precedente, riesce $dT = \frac{dS\sqrt{M}}{\sqrt{2G.\overline{B-X}}}$, e facendo il rapporto di questa espressione con l' altra del num. 179. avrassi $dT : dt :: \frac{dS\sqrt{M}}{\sqrt{2G.\overline{B-X}}} : \frac{ds\sqrt{m}}{\sqrt{2g.\overline{b-x}}}$. Ma $MR = b - x$, sta in proporzione col raggio $AC = r$, come similmente della fig. 5. $B - X$ con il respettivo raggio $= R$, dunque perchè $B - X : b - x :: R : r$, per eguaglianza di ragione, col

col sostituire, risulta che $DT : dt :: \frac{dS\sqrt{M}}{\sqrt{GR}} : \frac{ds\sqrt{m}}{\sqrt{gr}}$. In oltre per aversi supposti gli archi simili, e per conseguenza i loro elementi, deve stare $dS : ds :: R : r$, e però di nuovo surrogando, verrà finalmente $dT : dt :: \frac{\sqrt{MR}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{mr}}{\sqrt{g}}$, vale a dire i tempi elementari stanno fra loro in un rapporto costante, onde è ch' eziandio gli intieri, e finiti staran similmente.

COROLLARIO IV.

183. Se i raggi ponganfi eguali, e disuguale il restante, avrassi che $dT : dt :: \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g}}$; cioè sono i tempi tra loro in diretta proporzione sudduplicata delle masse, ed inversa suddupla delle gravità.

COROLLARIO V.

184. Fatto $G = g$, viene allora $dT : dt :: \sqrt{MR} : \sqrt{mr}$, cioè in ragion composta dimezzata de' raggi, e delle masse.

COROLLARIO VI.

185. E quando sia $M = m$, ne verrà $dT : dt :: \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}$, o vogliam dire i tempi in proporzion sudduplicata diretta de' raggi, e reciproca delle gravità.

O CO-

COROLLARIO VII.

186. Pertanto se il raggio CA in un Pendulo sia convertito, nel circolo verrà egli ad eseguir puntualmente le sue vibrazioni, senza esservi di bisogno a ciò fare d' Evoluta alcuna, come ben vedesi, e s' investirà pure nel di lui moto per conseguenza, di tutte le affezioni quì antecedenti spiegate.

SCOLIO.

187. Da più celebri, e rinomati Geometri si è creduto che se in un elementare, o minimo archetto di circolo scorra un grave, v' impieghi il medesimo altrettanto di tempo, che nella corda suttendente v' impiegherebbe. Il Dottissimo Padre Riccati però, il primo fra tutti, con elegante dimostrazione ha fatto vedere, negli Opuscoli suoi, esser questo un patente paralogismo, dimostrando anzi a contrario, ch' il tempo impiegato a trapassare la corda antidetta, si è dell' altro maggiore, che è per appunto quello, che nella seguente Proposizione mi propongo di dimostrare.

PROPOSIZIONE VIII.

Se in un archetto minimo di Circolo promovasi un corpo, il tempo a scorrerlo impiegato si è minore di quello speso a trapassar la corda subtesa.

Tav. 5. Fig. 1. 188. Facciasi, ch' un archetto infinitamente piccolo del primo ordine sia AOB, il quale insiem confondasi con la suttendente BA; Conducasi dipoi il raggio CO, e si assuma l'altro archetto minimo OE, ma del

del ſecondo ordine degli infinitamente piccoli; non credo quì neceſſario il dimoſtrare che l'arco $AO = As$, che $BE = Bp$, ed $OE = sp$. Conducanſi le verticali KO, ed Ms, come anche le applicate QO, ed Ls; ſe il tempo impiegato per lo ſpazio OE facciaſi $= T$, e quello per la corriſpondente corda $sp = t$, e le velocità dell' un caſo in $O = U$, e dell'altro nel punto $s = u$, avraſſi, come è noto, nel primo caſo $T = \frac{OE}{U}$, e $t = \frac{sp}{u}$ nel ſecondo. Perchè poi $EO = sp$, ſtarà $T : t :: u : U$, cioè i tempi fra loro in ragion reciproca delle velocità, ne' reſpettivi punti O, ed s acquiſtate. Per le teoriche de' piani inclinati coſta, che le anzidette celerità ſtanno ivi in ragion ſuddupplicata dell' altezze OK, ed sM, laonde ſoſtituendo, per eguaglianza di ragione, verrà $T : t :: \sqrt{sM} : \sqrt{KO}$. Onde ſe ſia $sM = KO$, ſarà vero che il tempo per l'archetto ſarà a quello della corda eguale eſſo pure; il che ſe eſſer poſſa vediamolo.

Dal calcolo delle *fluſſioni*, o altrimenti *differenziali* è chiaro, che KO, ed Ms ſon differenze dell'ordin ſecondo, come eziandio sO, per quel che dal Newton vien dimoſtrato; ma $is = QL$, eccesso della KO ſopra Ms, ha con sO finita, e determinata ragione; così per conſeguenza ſarà la ſteſſa QL egualmente differenza dell' ordin ſecondo, quindi avrà una ragione finita con le rette KO, ed Ms; dunque non potrannoſi queſte predette KO, ed Ms ad eguaglianza ridurre; ed altresì KO ſarà maggiore di Ms: dunque per eſſere $\sqrt{KO} : \sqrt{Ms} :: t : T$, ſe ne inferirà, che di quanto KO ſupera Ms, d'altrettanto t ſi è maggiore di T, o vogliam dire ch' il tempo per la corda haſſi maggiore di quello per l' arco, che è quel tanto che fu propoſto da dimoſtrare.

CAPITOLO XI.

Del Pendolo composto.

189. LA teoria de' Pendoli semplici, che ne' superiori Capitoli viene considerata, ci conduce a far parola del pendolo composto, come materia ch' a quella stessa in qualche maniera è connessa: e perciò resterà intieramente assoluta la trattazione de' Pendoli in questo Capo, col descriver del composto la particolare natura, ricercando unitamente il di lui centro d' oscillazione, indagine, ch' ha impiegata l' attenzione degli Uomini più versati nelle Fisico-Matematiche scienze, dopo l' Ugenio, che ne fu il primo investigatore.

ESEMPIO.

Tav. 5. Fig. 2. 190. Preso un Vette, o Verga inflessibile tenuissima, e di gravità spogliata $S\ d$, ch' appiccata al punto S, sianvi poi sospesi in essa due, o più corpi qualunque B, ed A; questa tal serie di corpi con il predetto Vette sospesi, è quello giustamente, che Pendulo Composto ei si chiama, come pure la lunghezza $S\ d$ il di lui asse. E quando che supporremo questo vibrarsi in archi circolari per cagion d' esempio *da*, e che le sue vibrazioni sieno equidiuturne, o *sincrone* come suol dirsi, con un Pendolo semplice nell' asse $S\ d$ preso, e disegnato per $S\ K$, questo semplice diceṡi allora al composto *sincrono*, ed il punto K, che determina la lunghezza del semplice, sarà quel tanto rinomato Centro d' oscillazione.

SCO-

S Ç O L I O.

191. La principale ricerca dunque, che si fa nel Pendolo composto è quella di ritrovare nell' asse il Centro predetto, dove supposti uniti tutti i pesi, il pendolo componenti, ne segua in ambedue, cioè nel semplice, e composto l' *isocronismo* accennato, che vuolsi dire lo stesso, che determinare quale esser debba la lunghezza SK del semplice detto. Per ciò fare mi prevarrò delle regole del gran Giovanni Bernoulli, da esso teorie delle forze vive chiamate, consistenti in ridurre a questo principio; che una somma di azioni unitamente esercitate produr deve una egual forza viva, della somma di quelle stesse azioni separatamente prese. Poichè se in vigor della potenza loro ne' corpi A, e B cadendo dall' altezza SO, ovvero Sa si trasfonde una forza viva giunti nella situazion verticale dell' asse Sd, questa insieme unita, allorchè il pendolo composto Sd vien vibrato, sarà la medesima di quella, che eglino avrebbero, se diviso il pendolo in due semplici SA, ed SB, questi vibrassero dall' istessa altezza separatamente, giungendo in Sd; e però sembra, che come indubitabile possa tal principio tenersi, onde con la scorta sua, dopo d' aver premesso il seguente Lemma, si procederà a ritrovarne il centro già nominato.

L E M M A.

192. Il ricordato vette inflessibile, o composto pendolo Sd si intenda, che dalla situazion verticale ad un' altra qualunque Sa se ne trapassi, intorno al punto di sospensione S vibrandosi; cioè ritornando di poi verticalmente in Sd, abbiano in tal forma descritti gli archi circolari cb, e da i mobili B, ed A esso componenti. Già è legge

ge notiſſima, ed altrove accennata, ch' i detti reſpettivi circolari archi ſono come tanti piani inclinati, e perciò i canoni, ch' in queſti vagliono, che l' iſteſſi ſono de' movimenti uniformemente accelerati, avran luogo egualmente per i predetti ſpazj circolari; dunque pervenuto il pendolo nella ſituazione ſuddetta $S\,d$, lo ſpazio ſcorſo ad dal mobile A ſia $= S$, la velocità in tal punto acquiſtata $= U$, ed il tempo impiegato $= T$. Così dell' altro grave B, giunto in c ſia lo ſpazio $c\,b = s$, la velocità $= u$, ed il tempo $= t$; ciò poſto ne verrà la ſolita equazione del num. 31. che $2S = UT$, e per l' altro $2\,s = ut$; ſicchè formandone l' analogia, ſtarà $2\ S : 2\,s :: UT : ut$. E poichè la verga infleſſibile, che uniſce i corpi non permette, ch' uno ſenza dell' altro movaſi, ne deriverà ch' i tempi impiegati per giugnere alla vertical ſituazione Sd, l' iſteſſi ſieno; e perciò ſi riduce $S : s :: U : u$, cioè gli archi come le velocità reſpettive. Gli archi ſimili altresì, chiamate le diſtanze $Sa = a$, ed $S\,b = b$, ci danno $S : s :: a : b :: U : u$; onde le velocità pure con le ſemplici diſtanze dal punto di ſoſpenſione ſono proporzionali, e ciò reſti ſtabilito in primo luogo.

193. Secondariamente poi notiſi, che ſe ambedue i corpi B, ed A ſeparatamente ſinganſi, come due pendoli ſemplici, dall' altezza medeſima diſcendere, ed alla direzione ſteſſa $S\,d$ arrivati: dal punto b condotto il perpendicolo $b\,n$, e dall' altro a anche $a\,m$, ſcorgeſi che in tal modo i piani inclinati $n\,b\,c$, ed $m\,a\,d$ formati ſarannoſi; quindi coſta che le acquiſtate celerità ne' punti c, e d ſtanno in ragion ſuddupla dell' altezze $b\,n$, ed $m\,a$; ovvero per averſi i triangoli ſimili $S\,n\,b$, ed $S\,m\,a$, in ragion ſudduplicata delle lunghezze $S\,b$, ed $S\,a$, e perciò reſta che $u : U :: \sqrt{b} : \sqrt{a}$; ciò preſuppoſto ſia.

PRO-

P R O B L E M A I.

Ritrovare nel Pendolo composto il Centro d' Oscillazione .

194. Rimanendo fissa la costruzione, e tutte le altre cose precedenti, pongasi in oltre, che la forza presa costante de' corpi sia alla quantità di materia, cioè alla massa proporzionale, e però del corpo A facciasi $= F$, e la massa $= M$, come si è praticato finora, e dell' altro $= f$ ed $= m$, discorrendola come al num. 60. avrassi $\frac{F}{M} = \frac{f}{m}$; le forze stanno in proporzione del quadrato delle celerità num. 49. laonde assunto il primo caso del Lemma del movimento del pendolo composto, verrà l' equazione spettante al corpo A, $F = Maa$, e per l' altro B, $f = mbb$, dove sommando, ne riesce $F + f = Maa + mbb$.

S' osservi ancora che queste tali velocità de' respettivi gravi, così unitamente mossi, debbono essere ineguali, giunti ch' essi sieno alla direzione Sd, per motivo ch' essendo al Vette inflessibile uniti, il primo B per l' azion del suo peso accresce all' altro la celerità, mentre ch' a contrario il Corpo A, in vigor del suo a B la ritarda. Imperocchè dovrà darsi nella retta Sa un punto intermedio fra i sopraccitati corpi, il quale si moverà d' una velocità, prodotta dall' azione della gravità d' ambedue. Questo dovrà essere adunque il Centro cercato; frattanto sia C, che giunto in K abbia per la sua nominata velocità $= x$, la quale perchè unitamente discende, sarà, come si è detto nel Lemma al primo caso $= C\ S$.

Ciò fissato, assumendo ch' ambedue i corpi come due pendoli semplici discendano, per doversi regolare la velo-

velocità di ciascheduno dalla detta $= x$, formandone le respettive equazioni, risulta, come dal num. 193 del precedente Lemma apparisce, $F = Max$, ed $f = mbx$; ed unendole, $F + f = Max + mbx$. Per lo principio stabilito al num. 191. ch'in ambidue le scese debbono aver le forze vive la ragion d'eguaglianza, riassumendo l'equazione del pendolo composto fissata poco anzi $F + f = Maa + mbb$, e la presente, risulterà $Maa + mbb = Max + mbx$, cioè $x = \frac{Maa + mbb}{Ma + mb}$; dunque per esser x proporzionale a CS, verrà ad aversi la lunghezza del pendolo semplice, col composto *isocrono*, e perciò il Centro C ricercato.

COROLLARIO I.

195. Sicchè osservasi, che per aver la lunghezza del semplice, *isocrono* al composto, si dovrà prender la somma del prodotto del peso di ciaschedun corpo nel quadrato delle distanze dal centro del moto, o sia punto di sospensione S, divisa poi per la somma de' pesi stessi moltiplicati nelle semplici distanze, essendo i corpi componenti il pendolo quanti si vogliano; ciò, che è in punto quel, che l'Ugenio medesimo, ed altri dopo esso han ritrovato.

COROLLARIO II.

196. Dall'aver fatta la supposizione, che dalla situazione Sa alla verticale Sd ne trapassasse il pendolo, manifestamente vedesi, che si dà luogo a ritrovarne le conseguenze medesime, quando vibrasse da altra qualunque, e perciò anche dall'orizzontale SO. In questo caso nient'

nient' altro dovrebbesi riflettere, che non sarebbe necessaria la surrogazione delle distanze per le velocità $m\,a$, ed $n\,b$, perchè ivi divengono esse medesime le $S\,a$, ed $S\,b$ sostituite.

COROLLARIO III.

197. Ritrovandosi il Centro C sempre mai nella retta $S\,a$, ed il pendolo semplice al composto isocrono, pervenuto nella direzione $S\,d$, per gli archi simili $K\,C$, e $d\,a$; si avrà $d\,a : KC :: S\,a : SC$; cioè riducendo ad equazione, gli estremi, e medj moltiplicando, $\frac{d\,a}{S\,a} = \frac{K\,C}{S\,C}$; ma gli archi divisi per i raggi esprimono gli angoli, num. 126. e gli angoli $d\,S\,a$, e $K\,S\,C$ sono le velocità angolari num. 159. e queste altresì essendo eguali, conforme vedesi; dunque si potrà stabilire, che de' pendoli isocroni, le velocità angolari debbono essere necessariamente eguali eziandio.

COROLLARIO IV.

198. Per converso poi seguir dee, che se le velocità angolari sieno eguali, eguali altresì saranno i tempi delle discese, vale a dire isocroni i pendoli semplici, e composti diverranno.

SCOLIO.

199. Assolute le teoriche di quei movimenti, che connesse andavano in qualche maniera con la prima fatta ipotesi delle forze tendenti al centro, proporzionali

 alle

alle femplici diftanze, o viaggi da fcorrerfi; maneggierannofi adeffo gli altri cafi delle medefime forze, in qualunque altra ragione variabili, nel feguente Capitolo; le quali quiftioni, o Problemi diretti foglionfi nominare oggidì nelle Scuole, in quanto che in contrario ad effe poi altre fi trattano, che viceverfa, converfe, ovvero inverfe fi dicono; perciò, e l' une, e l' altre fpiegate, fi darà così fine a quefta parte prima del Moto rettilineo nel vacuo generato.

CAPITOLO XII.

Delle forze variabili fecondo una poteftà qualunque delle diftanze dal Centro.

200. LA forza variabile verfo il Centro attraente diretta, fuppor fi può tale, che qualunque proporzione ad arbitrio ella ritenga della poteftà delle diftanze da quefto; Laonde acciocchè in una fola, e generale efpreffione le varie ipotefi reftino incluſe, fi prenderà l' efponente generico, ch' in $n-1$ venga difegnato.

PROBLEMA GENERALE

Dalla quiete difcenda un grave verfo il Centro delle forze, e fien quefte proporzionali alle diftanze alla dignità $n-1$ elevate, ritrovare la velocità, ed il tempo in qualfivoglia punto del fuo viaggio.

Tav. 5. Fig. 3. 201. Attratto, o vogliam dir tendente fia un mobile al Centro C, che dalla quiete nel punto A fe ne parta; avvegnachè la diftanza AC fia data, per averfi affe-

assegnato il Centro detto, ed il sito, ove il mobile è collocato, potrassi perciò nominare $AC = a$; disceso fino in B, lo spazio trapassato AB, al solito sia $= s$, e l'altro da compirsi $CB = x$, la velocità, di cui ivi è dotato $= u$, ed il tempo impiegato ad arrivarvi $= t$, la forza, che lo necessita in $A = F$, e l'altra in $B = f$. Per le condizioni, ch' il Problema ricerca, saran queste forze, ne' due respettivi punti considerate, come $F : f :: a^{n-1} : x^{n-1}$, per la qual cosa in B, diverrà $f = x^{n-1}$; e così nella solita espressione delle forze, nello spazietto infinitamente piccolo Bb moltiplicate, quale è $fds = mudu$, si avrà $x^{n-1}ds = mudu$, ma $s = a - x$, e $ds = -dx$, onde sostituendo, risulta la legittima espressione $-x^{n-1}dx = mudu$. S' integri adesso, e viene $A - \frac{x^n}{n} = \frac{mu^2}{2}$; e riflettendo, che il mobile quando è in A viene $s = o$, come altresì $u = o$, ed $a = x$, quindi sarà la costante, $A = \frac{a^n}{n}$, talchè sostituendola, si ricaverà che $\frac{a^n}{n} - \frac{x^n}{n} = \frac{mu^2}{2}$, cioè, fatta la massa $m = 1$, $u = \frac{\sqrt{2a^n - 2x^n}}{\sqrt{n}}$, che è la velocità ricercata nel detto punto, o in qualunque altro, che fosse presa a ritrovarsi.

202. Per ottenersi il tempo, facciasi uso dell' equazione solita $dt = \frac{ds}{u}$, e sostituita, come devesi al fatto presente, la velocità già trovata, e l'equivalente dello spa-

ſpazietto minimo ds, verrà $dt = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times \frac{-dx}{\sqrt{a^n - x^n}}$; ed integrando per averſi il tempo finito, rieſce $t = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times \int \frac{-dx}{\sqrt{a^n - x^n}}$, applicandoſi parimente a qualunque altro punto fuor di B, nella predetta diſtanza CA.

COROLLARIO I.

203. Se nel Centro C pongaſi, ch' il mobile ſia pervenuto, onde venga $x = o$, ne deriva dalla generale ritrovata antecedente equazione della velocità, che $\frac{a^n}{n} = \frac{u^2}{2}$, ovvero $u = \frac{\sqrt{2a^n}}{\sqrt{n}}$, per quella in iſpecie nel centro dal grave acquiſtata.

COROLLARIO II.

204. E fatto n negativo; ſul ſuppoſto iſteſſo d' $x = o$, l' equazione generica, $\frac{a^n}{n} - \frac{x^n}{n} = \frac{u^2}{2}$, rieſce $\frac{u^2}{2} = \frac{1}{-na^n} \quad \frac{-1}{-no^n} = \infty$, vale a dire, che ei ſarebbe infinitamente grande la celerità nel centro.

COROLLARIO III.

205. Fingaſi, che il punto, da dove principia a moverſi il corpo ſia in infinita lontananza, e per conſeguen-

ſeguenza ancora $AC = \infty$, la velocità allora viene $\frac{u^2}{2} = \frac{\infty^n - x^n}{n} = \infty$, cioè nel punto B infinita, come infinita fu nell' antecedente corollario nel centro.

COROLLARIO IV.

206. Tutto reſtando come nel Problema ſupponeſi, e ſolo s' aggiunga, ch' il corpo non dalla quiete cominci a moverſi, ma bensì con una data velocità $= c$, dal punto A ſuppoſto, l' equazione del num. 201. nel punto B, prima di determinar la coſtante, reſta la ſteſſa $\frac{u^2}{2} = A - \frac{x^n}{n}$. Ora ſupponendo il corpo in A, viene $a = x$, e $c = u$, ſicchè la coſtante aſſunta riſulta, $A = \frac{c^2}{2} + \frac{a^n}{n}$; per lo che ſoſtituita nell' equazione, ſe ne produrrà $\frac{u^2}{2} = \frac{c^2}{2} + \frac{a^n}{n} - \frac{x^n}{n}$, o ſia $u = \frac{\sqrt{nc^2 + 2a^n - 2x^n}}{\sqrt{n}}$, per le velocità del corpo in tal ſuppoſto.

COROLLARIO V.

207. I tempi parimente avrannoſi dal metodo ſteſſo, onde $dt = \frac{-dx\sqrt{n}}{\sqrt{nc^2 + 2a^n - 2x^n}}$, che integrati, l' intieri, e finiti ci ſomminiſtreranno.

COROLLARIO VI.

208. Tutto quello, ch' al num. 123. fu rilevato in ſuppoſizione, che due i gravi cadenti foſſero, i quali da diverſe altezze, o dalla quiete, o pure con data celerità al centro tendeſſero, ſi potrà, come oſſervaſi, in ogni ſuppoſizione applicare; onde a queſto propoſito, e per altro da conſiderarſi in ſeguito, reſterà per ſempre avvertito.

SECONDO CASO.

209. Stando l' eſpreſſione generale della poteſtà $n-1$, e l' ipoteſi ſia della forza repulſiva, e però nient' altro varj, che da poſitiva negativa diventi, come in più luoghi egli è ſtato ſufficientemente notato, avrebbeſi l'analogia de' due reſpettivi punti così, $-F : -f :: a^{n-1} : x^{n-1}$, e perciò eſſendo $-f = x^{n-1}$, ſarebbe la forza da introdurſi nella formula, x^{n-1}. Laonde ciò fatto, verrebbe $x^{n-1}dx = udu$, ed integrando, ſecondo le ſolite regole, e metodo nel Problema generale ritenuto, rieſcirà finalmente la velocità $u = \frac{\sqrt{2x^n - 2a^n}}{\sqrt{n}}$, eſpreſſione negativa della ritrovata nel citato problema, e tale eſſer dovendo, da quel tanto, che ſi vide al num. 130.

210. Ammettendoſi il raziocinio ſteſſo per lo tempo, ei ſarà a quello del num. 202. contrario ne' ſegni, per lo che viene $dt = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times \frac{dx}{\sqrt{x^n - a^n}}$, quindi è ch' ambedue le preſenti eſpreſſioni applicabili ſaranno, per le ricerche da farſi in cotale ſpecie di forze.

CO-

COROLLARIO I.

211. Quando adunque si trattano i casi della forza centrale, la forza si assume positiva, ed allorchè supponesi esser la repulsiva, dal segno negativo venir dee essa affetta, conforme si è scorto; da che se ne dedurrà, che nelle ricerche seguenti, mentre che ne risulti il segno positivo nella forza, che verrà ritrovata, ella sarà la centrale, e se negativo, la respingente; essendo ciò necessario avvertire per l' uso, che ne' conversi problemi dovrà farsi di tal legge.

SCOLIO.

212. Le riflessioni altresì, e Corollarj da inferirsi al caso già detto di forza negativa, sufficientemente spiegati si sono al Problema del sopraccitato num. 130., onde colà rimettiamo al discreto Lettore di consultarsi; soltanto, affinchè si sfugga ogni ambiguità, noterò di passaggio, che parlandosi sì della forza centrale, che respingente, delle quali, una per rapporto all' altra, in senso opposto necessita al movimento il grave, non vuolsi l' istesso concetto indicare, ch' i moti uno sia l' accelerato, e l' altro il ritardato, ambedue precedentemente spiegati; anzi che agiscono queste con gli andamenti medesimi, mentre che la prima verso del Centro spingendolo, gli accresce sempre maggiore la celerità, da che ne deriverà, ch' in esso sarà dotato della massima, che aver possa. La seconda in detto centro non genera nel grave velocità alcuna, o sia, che egli avrà la massima tardità, che aver possa, e di poi successivamente allontanare facendolo, quella di mano in mano gli accresce; quindi avviene, che le potenze, le stesse passioni ambedue nel

nel mobile producono, benchè in senso contrario; ei è ben vero però, ch' in ciascun moto, individualmente preso, vi si potranno applicare le regole dell'accelerato, e ritardato stabilite. Avendo ciò avvertito, per concepir con evidenza ogni natura di movimento, si farà passaggio adesso alla ricerca delle affezioni sue nelle varie ipotesi, che supporremo delle forze proporzionali alle distanze, in ambedue le specie riguardate, attribuendo diverso valore all'assunta generale dignità n, dove una cotal varietà si racchiude, distribuendole in varj esempj, con i quali sarà alle quistioni dirette, già sopra indicate, posto fine.

ESEMPIO I.

213. Le forze adunque, come nel Problema generale apparisce, il mobile fino in B promosso, o in qualunque altro punto dell' assunto spazio, vengon ne' due respettivi punti come $F:f :: a^{n-1} : x^{n-1}$; or dunque per prima supposizione facciasi, che sia $n=1$, e saranno $F: f :: a^{0} : x^{0} :: 1:1$, talchè includesi in questa l'ipotesi dell' esser tali forze costanti, e non variabili; laonde l'equazione generale della velocità sopra esposta num. 201. $\frac{u^{2}}{2} = \frac{a^{n}-x^{n}}{n}$, viene $\frac{u}{2} = a-x$. Ma costando, che $a-x = BA = s$, se faremo la sostituzione si ricaverà, che $u^{2} = 2s$; espressione, che punto non varia dalla ritrovata al num. 91. dove in realtà si fece il supposto stesso di gravità costante, salvo che ivi si ponga $f=1$, come altrove si fece.

214. Il tempo parimente si ritroverà come ivi al num.

num. susseguente 92, o col metodo per appunto là tenuto, sostituendo nella solita formula le velocità, o pure presa la formula generale su riferita $dt = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times \frac{-dx}{\sqrt{a^n - x^n}} = \frac{-dx}{\sqrt{2a - 2x}}$, verrà poi al supposto applicata, nella quale di più sostituendo ds in luogo di $-dx$, come pure s in luogo di $a - x$, integrata, ci dà l' espressione $t = \sqrt{2s}$, che sono le due proposte ricerche.

COROLLARIO I.

215. Continuandosi la supposizione di $n = 1$, ed il fatto alla repulsiva s' adatti, da cui si ha num. 209. $\frac{u^2}{2} = \frac{x^n - a^n}{n}$, ei sarà la velocità $\frac{u^2}{2} = x - a$, equazione similissima delle velocità nella forza centrale, poco anzi esposta, non variando che ne' segni, il che talmente esser dee, per l' azione a contrario dalla potenza esercitata.

COROLLARIO II.

216. Il tempo in questa ipotesi, col prendere la sua fissata espressione del caso secondo, riesce $dt = \frac{dx}{\sqrt{2x - 2a}}$, e coll' essere $x - a = s$, e $dx = ds$, integrando, risulta $t = \sqrt{2s}$.

ESEMPIO II.

217. Fatta la quantità $n = 2$, affinchè ne segua,

 che

che la proporzionalità delle forze $F : f :: a^{n-1} : x^{n-1}$ porti, che queste sieno come le semplici distanze, direttamente prese, cioè $f = x$, che fu il caso discusso al num. 118. l' equazione num. 201. sarà $uu = aa - xx$, cioè la velocità per un' ordinata al circolo rappresentata, come tale fu realmente al preallegato numero.

218. Il tempo dell' equazione $dt = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times \frac{-dx}{\sqrt{a^n - x^n}}$, che fu la generale, conforme costa, si converte nella presente $dt = - \frac{dx}{\sqrt{aa - xx}}$, parimente lo stesso del num. 119. in questa medesima supposta ipotesi, sopra del quale distesamente là ne fu ragionato.

COROLLARIO I.

219. Stando $n = 2$, allorchè repulsiva si consideri la forza, sarà la velocità $u = \sqrt{xx - aa}$; espressa per un' ordinata all' iperbola equilatera, conforme si scorge; i tempi poi vengono $dt = \frac{dx}{\sqrt{xx - aa}}$, che sono conseguenze medesime del num. 130. e 131. dove l' ipotesi indicata si riteneva.

ESEMPIO III.

220. Fatta la dignità $n = 3$, talmente che la riferita ragione così s'esprima $F : f :: a^{n-1} : x^{n-1} :: a^2 : x^2$, sarà, come osservasi, la forza $f = x^2$; cioè al quadrato delle distanze proporzionale direttamente; da che verrà ad

ad averſi, $\frac{u^2}{2} = \frac{a^3 - x^3}{3}$, e col conſueto raziocinio dedurrannoſi pure anche i tempi, cioè $dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{-dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$.

S C O L I O.

221. Se in vece di dedurre il valore delle quiſtioni ricercate dalle generali formule anzi dette, come abbiam fatto, ſi aſſumeſſe il reſpettivo valore della forza f proporzionale con le diſtanze, a quella ragione, che vuolſi, e nella ſopra allegata eſpreſſione delle potenze negli ſpazj ei s' includeſſe, è manifeſto, che la coſa ritorna allo ſteſſo; poichè l' induzione della generale eſpreſſione, dalla particolare dipende. Per eſemplificare in ogni aſpetto ſopra tali ricerche, facciaſi perciò, che $A - \frac{x^3}{3} = \frac{u^2}{2}$ ſia il caſo preſente della forza introdotta, ed integrata, poſciachè la coſtante con le regole ordinarie determinata, viene $A = \frac{a^3}{3}$, verrebbe parimente come poco fa ſi è veduto, $\frac{u^2}{2} = \frac{a^3 - x^3}{3}$, e ciò baſti una volta per ſempre averne parlato.

C O R O L L A R I O I.

222. E parlandoſi della forza repulſiva, ſarebbe

$\frac{u^2}{2} = \frac{x^3 - a^3}{3}$, dalla quale ritrovasi ancora il tempo, come di già più volte si è fatto.

ESEMPIO IV.

223. Nella forma stessa si procederà, se in vece della proporzion diretta, abbiano le forze con le distanze una reciproca ragione, la quale primieramente s' ottiene supponendo l' $n = o$, onde ne derivi $F : f ::$ $a^{o-1} : x^{o-1} :: \frac{1}{a} : \frac{1}{x}$, cioè $f = \frac{1}{x}$, vale a dire, che sono le forze nell' inversa proporzione delle semplici distanze; la più volte citata generale equazione, diverrà $\frac{u^2}{2} = \frac{a^o - x^o}{o}$, la quale niente ci fa sapere, come prender debbonsi le celerità del grave; quindi per averle, si ricorrerà alla stabilita formula $f\,d\,s = m\,u\,d\,u$. Imperciocchè in vece di f sostituendovi la quantità a questa proporzionale, e altronde $-\,d\,x$ in luogo di $d\,s$, verrà ad aversi $-\frac{d\,x}{x} = u\,d\,u$, talmentechè integrata, ci dà $A - l\,x = \frac{u^2}{2}$; e perchè $A = l\,a$, e perciò se ne dedurrà $\frac{u^2}{2} = l\,a - l\,x = l\,\frac{a}{x}$ equazione alla logistica del secondo ordine.

224. Avendosi adunque $-\frac{d\,x}{u} = x\,d\,u$ nel precedente num., e la formula de' tempi avvegnachè sia $d\,t = -\frac{d\,x}{u}$, surrogando il luogo dello spazietto, per la velo-

locità diviso, verrà $x\,du = dt$, cioè $\int x\,du = t$, pel tempo cercato.

COROLLARIO I.

225. Nel trattarsi l'ipotesi stessa sul caso della forza repulsiva, pure egualmente nulla ci farebbe sapere, se non che nella maniera precedente maneggiata, da che verrebbe $\frac{u^2}{2} = l\frac{x}{a}$, cioè la Logistica medesima, e nient'altro di variazione avrebbesi, che nel divenire x maggiore di a; come pure in forma simile del num. antecedente applicandosi il discorso, avrassi il tempo impiegato.

ESEMPIO V.

226. Pongasi l'n sempre eguale a quantità negativa, e ne verranno le altre ipotesi della ragione reciproca delle distanze; e perciò per esempio, $n = -1$, produrrà, che $F:f::a^{n-1}:x^{n-1}::\frac{1}{a^2}:\frac{1}{x^2}$, ella sia $f = \frac{1}{x^2}$, cioè le forze fra loro in proporzione reciproca de' quadrati delle dette distanze dal centro; da cui ne seguirà, dalla generica accennata equazione, che $\frac{u^2}{2} = \frac{1}{-a} - \frac{1}{-x} = \frac{a-x}{ax}$, e così estraendo la radice, $u = \frac{\sqrt{2a-2x}}{\sqrt{ax}}$.

227. Presa per tanto l'espressione $dt = -\frac{dx}{u}$, e sur-

ſurrogandovi l' antecedente velocità ritrovata, avremo $dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \times \frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, e traſcurate le quantità coſtanti, che non alterano la ſpecifica natura dell' equazione, riſulterà il tempo impiegato, $t = \int \frac{-x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}$, il quale per eſercizio coſtruiraſſi, maggiormente che ci iſtruiſce di un' altra proprietà della mirabile curva della Cicloide, di cui ſopra ſi è ſufficientemente parlato.

Tav. 5. Fig. 4. Per lo che deſcritta la ſemicicloide ordinaria AHN, cioè quella tale, che porta per proprietà, che la retta CN pareggi la ſemiperiferia del Circolo genitore, denominata $AC = a$, $CB = x$, e $Bb = -dx$, è chiaro, che ſi è l' applicata al detto circolo, cioè la $BI = \sqrt{ax - xx}$. In oltre coſta altresì, che l' elemento circolare $IL = ds$, è pure $= \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}}$; prolungata pertanto BI fino in H, acciocchè ſia della Semicicloide l' ordinata, e fatta $BH = y$, per una delle proprietà della curva num. 144. ſarà $y = \int \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}} + \sqrt{ax-xx}$; ſicchè differenziando, ne viene $dy = \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}} = \frac{-x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}$; la quale eſpreſſione vedeſi eſſer la medeſima in tutto, e per tutto dalla ritrovata poco fa, eguale al tempo ricercato. Laonde avraſſi, che $dy = \frac{-x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}} = dt$, e percio $y = t$; va-

t; vale a dire ch' il tempo nel punto B, all' applicata della Cicloide riesce proporzionale, e così d' ogni altro punto discorrasi.

COROLLARIO I.

228. Sta fermo ch' in vigor della proprietà accennata al poco fa citato numero, abbiasi $t = AI + BI$. Sicchè nel centro C giunto il corpo, farà $t = AC$, semiperiferia del Circolo, posciachè diviene ivi $BI = o$, come chiaramente vedesi.

COROLLARIO II.

229. Riassumendo la supposizione, della presente fissata velocità $\frac{u^2}{2} = \frac{1}{-a} - \frac{1}{-x}$, qualora pongasi, ch' il mobile da infinita distanza, dalla quiete a scender principiasse, onde abbiasi $a = \infty$, diverrebbe $\frac{u^2}{2} = \frac{1}{x}$, talchè risultà finita la velocità, come vedesi, quantunque da lontananza infinita diasi al moto principio. Il tempo poi viene $dt = \frac{-x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2}}$, cioè integrando, $t = \frac{-x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1\sqrt{2}} = \frac{-x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3}$.

COROLLARIO III.

230. E se nel Centro sia successivamente disceso, poichè $x = o$, allora la velocità allegata ritrovasi $u = \infty$, cioè

cioè d' un valore infinito: da che non chiaramente egli comprendesi verso qual parte prenderà il grave la direzione, o se oltrepasserà il centro detto, l' intrapreso retto cammino proseguendo, ovvero se retrocederà, respinto da C verso il punto A. E' vero eziandio che non solo di celerità, ma di potenza infinita ancora nel centro è fornito, ricavandosi dal supposto, che $f = \frac{1}{x^2}$, coll' esser $x = 0$, produce $f = \infty$.

COROLLARIO IV.

231. Essendo la negativa della centrale la forza, cioè la respingente, coll'assegnarsi la medesima suddetta ragion di forze, sarebbe la velocità del caso secondo, $\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{ax}}$, ed il tempo, $dt = \frac{dx\sqrt{ax}}{\sqrt{2x-2a}}$, da costruirsi ambedue l'equazioni per la specie delle curve, dette *Versorie* iperboliche, il che si ommette per non riguardare il nostro istituto a tale oggetto principalmente.

ESEMPIO VI.

232. Ponendo $n = -2$, racchiudesi, in cotale assegnato valore la condizione, che $f = \frac{1}{x^3}$, cioè le forze in ragion reciproca de' i cubi delle distanze dal centro; poichè viene $F : f :: a^{-2-1} : x^{-2-1}$, e perciò, le velocità più volte nominate num. 201. risulteranno $u = \frac{\sqrt{aa-xx}}{ax}$.

233.

233. E per i tempi impiegati sostituendole, come deesi, avrassi $dt = -\frac{axdx}{\sqrt{aa - xx}}$, ed integrando, poichè in simil caso sen viene l'equazione algebraicamente integrata, è il tempo finito, $t = a\sqrt{aa - xx}$, che per essere l'equivalente valore di tal tempo, proporzionale ad un' ordinata nel circolo, siccome costa, non mutando la costante nulla, descrivendo un quadrante col raggio $= a = CA$, sarà di questo l'applicata quella, ch' esprimerà in ogni punto il tempo scorso, che proponesi ritrovare.

COROLLARIO I.

234. Pervenuto poi il grave cadente nel centro, diventa altresì $x = o$, onde riesce l'equazione precedente, $t = aa$, vale a dire il tempo in ragion de' quadrati delle altezze, il che si vede manifestamente dal num. antecedente eziandio, perchè in tal caso l'ordinata nel raggio stesso convertesi.

COROLLARIO II.

235. Se la distanza CA pongasi infinita, stando tal supposizione di forze, è noto esser la formula $\frac{-dx}{x^2} = udu$, ch' integrata di poi, $A - \frac{1}{-2xx} = \frac{uu}{2}$; determinandosi la costante assunta, con la supposizione, ch' il grave dalla quiete partito, e nel principio del moto collocato, dove viene $x = a = \infty$, deriva da ciò, $A = o$, e così ne vien prodotta la velocità $uu = \frac{1}{xx}$, cioè $1 = ux$, equazione dell' Iperbola fra gli asintoti notissima.

236. Il tempo, parimente col foſtituirne le velocità aſſegnate, verrà $dt = - x dx$, cioè integrando, $2t = - xx$, che per la parabola Apolloniana puoſſi coſtruire.

CORLLARIO III.

237. Stando $n = -2$ nella repulſiva, ſaranno le velocità, num. 209. $u = \frac{\sqrt{xx - aa}}{ax}$, ed i tempi, num. 210. $dt = \frac{axdx}{\sqrt{xx - aa}}$; i quali integrati, perchè come ſopra poſſono divenir tali, ſaranno $t = a\sqrt{xx - aa}$, cioè all' ordinata dell' Iperbola proporzionali.

SCOLIO.

238. Si è tralaſciato, conforme altrove avvertiſſi pure, di maneggiare in ogni eſempio il caſo, che non dalla quiete a diſcendere il mobile principiaſſe, ma con celerità aſſegnata; ed egualmente s' omette eſemplificar col ſuppoſto, che due egli foſſero, i gravi i quali al centro tendeſſero, poſciachè dall' antecedenti ſpiegate regole, reſta faciliſſimo l' eſeguirſi; gli eſempj pure non gli eſtenderemo maggiormente, eſſendoſi però indicata la ſtrada a chi per più eſercizio voleſſe avanzarli. S' aggiugnerà ſoltanto a tal materia un Problema, nella ſuppoſizion delle forze non come i viaggi, o ſpazj da ſcorrerſi, come ne' precedenti eſempj è ſtato poſto, ma bensì variabili in ſuppoſizione, che queſte abbiano la loro proporzione con gli ſpazj ſcorſi, o fatti viaggi, per vederne d' un movimento tale le ſpecifiche illa-

illazioni, acciocchè servir possa di chiarezza maggiore per le trattate, e da trattarsi teoriche, riguardando così in ogni aspetto le loro derivate leggi.

PROBLEMA II.

Partendo un mobile dalla quiete nel punto A collocato, e la forza, che lo spinge varj in un punto arbitrario della retta AC, in proporzione degli scorsi spazi, elevati alla potestà n, ritrovare l' affezioni d' un tal movimento. Tav. 5. Fig. 3.

239. Pervenuto adunque in B il grave dalla quiete in A partito; tutto s' intenda nominato come sopra, cioè la velocità $= u$, $AC = a$, $CB = x$, $AB = s = a - x$, $ds = - dx$. Presupposto ciò, dalle condizioni ricercate resultar deve, che $f = \overline{a-x}^{n}$, quindi per la consueta formula, verrà $-dx . \overline{a-x}^{n} = udu$, da dove avrannosi le velocità, ed i tempi per conseguenza, cotali celerità ritrovate.

COROLLARIO I.

240. Ponendosi $n = o$, verrebbe $a - x = 1$, cioè include la supposizione le forze costanti, e non variabili proporzionalmente agli scorsi spazj; e perciò la formula antecedente integrata, ci presenta $- x + A = \frac{uu}{2}$; e facendo $u = o$, sarà $x = a$, e la costante $A = a$, e però l'equazione viene ella ad essere $a - x = \frac{uu}{2}$, vale a dire $2s = uu$, espressione medesima dell' esempio

1. dove in effetto le forze costanti supposte furono.

COROLLARIO II.

241. Il tempo similmente verrà determinato come lì, $t = \sqrt{2s}$, quando che le velocità sieno nella propria sua formula surrogate.

COROLLARIO III.

242. Fatta $n = 1$, onde sia la forza $f = a - x$; cioè ai semplici scorsi spazj proporzionale, e così ne derivi, che $-dx \cdot \overline{a - x} = udu$; integrando verrà $-ax + \frac{xx}{2} = \frac{uu}{2} + A$, e la costante $A = -\frac{aa}{2}$, e perciò $aa - 2ax + xx = uu$, e cavata la radice, $u = a - x$; la quale ci dinoterebbe, che le velocità fossero similmente ai semplici trapassati spazj proporzionali, il che se possibil sia vedrassi nel corollario seguente.

COROLLARIO IV.

243. La formula de' tempi verrebbe adunque $dt = \frac{-dx}{a - x}$, la quale integrandola, ci darebbe $t = l\,\overline{a - x} + A$, e considerandosi il grave nel punto A, dove vien $t = o$, e dove hassi pure $x = a$, risulta $A = -l\,o$, e perciò mettendovi tal valore, egli è $t = l\,\frac{a - x}{o} = \infty$, cioè il tempo infinito riescirebbe, nello scorrersi lo spazio predetto; dovendosi intendere con ciò, che

che il grave mai si partirà da tal punto A, e quindi impossibile il moto in questa forma supposto.

COROLLARIO V.

244. L' istessa conseguenza ricavasi dal riflettere, che la supposizion delle forze, come gli spazj da scorrersi così direttamente, ella si è per natura sua impossibile, e perciò a dimostrarci l' impossibilità del moto predetto, deve necessariamente condurci. Imperocchè supponendosi partir dalla quiete con forze agli spazj scorsi proporzionali, nel punto d' infinita tardità, ch' in A supponesi esistere, egli è il nominato spazio $= o$; sicchè la forza a questo eguale, sarà parimente $= o$. Ciò posto dunque, come mai potrà prodursi moto in un corpo di forza spogliato? La riprova di quel tanto, che s' asserisce ben vedesi dall' equazione medesima della forza stessa, mentre essendo $f = a - x$, allorchè nel punto A venga il corpo situato, dove $a = x$, vien similmente $f = F = o$.

COROLLARIO VI.

245. Sia $n = 2$, onde abbiasi $f = aa - 2ax + xx$; e perciò costituito in A, dove $a = x$, si avrà $f = F = aa - 2aa + aa = o$, cioè come sopra nulla la forza; ed estendendo la teoria a qualunque altro supposto maggiore della detta potestà n, sempre, e poi sempre, verificherassi lo stesso; da che se ne può legittimamente conchiudere, che come la forza, ch' il grave spinge, supporrassi variare nel mobile, come gli spazj scorsi direttamente, ei non potrà in effetto succedervi in natura il movimento.

CO-

COROLLARIO VII.

246. Se poi facciasi, che la potestà n divenga eguale ad una quantità negativa, per esempio $n = -1$, sicchè ne risulti dalla nota equazione generica, $f = \frac{1}{a-x}$, allora il supposto racchiude la condizion delle forze, con proporzione reciproca de' semplici fatti viaggi; onde è che venendo sempre a considerarsi nel punto A, che $x = a$, la forza altronde sarebbe ivi $f = F = \frac{1}{o} = \infty$, cioè eguale all' infinito.

COROLLARIO VIII.

247. Con tal supposizion precedente di forza, cioè d' infinito valore in A, ponendosi promosso il grave fino in B, diverrà $\frac{-dx}{a-x} = udu$ la formula più volte allegata; e però integrando, $\frac{u^2}{2} = l\overline{a-x} + A$, e fissata la costante, quale è $A = -lo$, riducesi che $\frac{u^2}{2} = l\frac{a-x}{o} = \infty$. Facendoci ciò vedere ch' infinita egualmente la celerità lì risulta: e per conseguenza pure, che $dt = -\frac{dx}{u} = \frac{-dx}{\infty} = o$, vale a dire, il tempo di niun valore.

SCOLIO.

248. Hassi fatto uso nel trattare le sopraccitate qui-

quiſtioni dell' ordinario canone, da' Meccanici tutti ritenuto, quale egli è di prendere l'eſpreſſione della potenza, relativa in ogni ſuo valore alla lontananza del centro, come ſpazio da trapaſſarſi riguardato. Ma ſiccome due poſſono eſſer le ſtrade, ch' al trattare le quiſtioni già dette, conducir ci poſſono, una la nominata, e l'altra conſiſtente nel riferire la potenza del grave alle diſtanze, come tempi ſcorſi elleno aſſunte, num. *66.* e perciò nel ſeguente generale problema, in queſto ſecondo aſpetto ſarà maneggiata la forza, affinchè alle teoriche de' movimenti diaſi ogni maggior lume, e chiarezza.

PROBLEMA GENERALE.

Dalla quiete in A *diſcenda il corpo verſo il centro* Tav. 5.
C *delle forze, e queſte abbianſi proporzionali alle lonta-* Fig. 3.
nanze rappreſentanti i tempi da ſcorrerſi, ed alla dignità n — 1 *elevate, ricavarne le velocità, e gli ſpazj in un qualſivoglia ſuppoſto punto.*

249. Si nomini come ſempre $AC = a$, ed arrivato il grave in B, ſerva in queſto caſo la retta AB per lo tempo, chiamato $= t$, e di poi $CB = z$, e le velocità di cui ivi è fornito $= u$. Ne riſulta per quel tanto ch' al citato num. *66.* ſi è detto, che $-fdz = du$, quì pure facendo $m = 1$: e perchè ſi ſtabiliſce che $f = z^{n-1}$, avraſſi perciò $-z^{n-1}dz = du$, quindi integrando, $A - \frac{z^n}{n} = u$; e fatto che ſtia in quiete il corpo moſſo, dove il tempo $t = o$, ed $u = o$, come eziandio $z = a$, e conſeguentemente $A = \frac{a^n}{n}$, produrrarſi per la celerità, $u = \frac{a^n - z^n}{n}$, data per l'altezze ſignificanti il tempo.

250. Val sempre mai il canone più volte riportato $ds = u\,dt$, cioè al fatto presente, per essere $t = a - z$, e $dt = -dz$, $ds = -u\,dz$; e surrogandovi la velocità poco anzi dedotta, ricavasi, che $ds = \frac{-dz.\overline{a^n - z^n}}{n}$,

e però $A + s = -\frac{a^n z}{n} + \frac{z^{n+1}}{nn+n}$; di poi facendo $s=o$, che altronde viene $z = a$, resta la costante $A = -\frac{a^{n+1}}{n} + \frac{a^{n+1}}{nn+n} = -\frac{a^{n+1}}{n+1}$, laonde col surrogare,

$s = \frac{z^{n+1}}{nn+n} - \frac{a^n z}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1}$, la quale espressione generale ci farà cogniti ne'casi particolari gli spazj, per la funzione assegnata del tempo.

COROLLARIO I.

251. Promosso il corpo fino al centro, dove $z=o$, la celerità sopraddetta, in primo luogo fassi $u = \frac{a^n}{n}$, e lo spazio in secondo luogo, $s = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

COROLLARIO II.

252. Dovendo partir dalla quiete nel punto A, apparisce con tal supposizione che ivi le velocità, e spazj nulla saranno, avvegnachè tempo alcuno trapassato non sia, onde è che inferir pur dovrassi dalle soprascritte equazioni, ponendo, come realmente succede, ch'in

ch' in tal punto trapaſſi $z = a$. Quindi l' equazion generale della celerità converteſi in queſta, $u = \frac{a^n - a^n}{n} = o$; e degli ſpazj, $s = \frac{a^{n+1}}{nn+n} - \frac{a^{n+1}}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1} = o$, col ridurre alla denominazione medeſima; il che tutto vien fatto in riprova delle giuſte ricavate illazioni.

COROLLARIO III.

253. Diaſi all' eſponente n il valore dell' unità, vale a dire che $n = 1$, riſulta allora num. 249. che $u = a - z = t$, cioè la velocità come i tempi: talmente eſſer dovendo, poichè la poſizione ſtabiliſce ch' ella ſia la forza $f = z^{1-1} = z^o = 1$, cioè coſtante; e perciò quel tanto, che fu ricavato al num. 43. quì ancor ſi conchiude.

COROLLARIO IV.

254. Lo ſpazio altronde diverrà num. 250. $s = -az + \frac{z^{1+1}}{1.1+1} + \frac{a^{1+1}}{1+1} = \frac{zz - 2az + aa}{2} = \frac{tt}{2}$ num. precedente, o ſia che gli ſpazj ſtanno in ragion de' quadrati de' tempi, conforme num. 53. fu ritrovato nel citato ſuppoſto di forza.

COROLLARIO V.

255. Conſiderandoſi il grave nel centro, dove $z = o$, diviene la velocità num. 253. $u = a = t$, cioè ſempre come il tempo, poſciachè la diſtanza AC nel preſente caſo ei l' eſprime; e ſi ha pure $2s = aa = tt$ coroll. an-

tecedente, cioè vedesi, ch' in ogni punto, deve ritenere lo spazio la ragione poco fa nominata.

COROLLARIO VI.

256. Qualora supponessimo che la forza una qualche ragione ritenesse, non come il tempo da scorrersi, il che fino ad ora abbiam posto, ma bensì con il tempo di già trapassato, conforme dello spazio si esemplificò num. 239. giacchè dalla quiete il mobile principia il suo corso, sarebbe impossibile un tal movimento; chiaramente apparendo ciò dall' esser $t = o$, quando che in *A* egli si stabilisce esistere il grave; onde per legittima illazione, la forza ad esso proporzionale $= o$ divenir dee, come si dedusse al num. 244. relativamente ancora allo spazio.

COROLLARIO VII.

257. Altre ipotesi della dignità n, che suppor si potrebbero, per brevità si tralasciano, e perchè nulla di particolare ci insegnano, e perchè facili eziandio riescono a chi maneggiar le volesse, applicandovi il metodo antecedentemente praticato.

CA-

CAPITOLO XIII.

Delle trattazioni de' Problemi conversi agli antecedenti, dove le velocità, ed i tempi si assumeranno per dati.

258. AVendosi trattate quelle quistioni, dove le forze espresse furono in proporzione qualunque delle distanze, e ricavatesi altresì quelle necessarie conseguenze, che da tal supposizione derivano, essendosi venuto con far ciò a prescriver quei Problemi, che diretti possono nominarsi, si procederà adesso all'esame dell' altre quistioni in ordine converso considerate, e per ciò per rapporto all' antecedenti, Problemi conversi potranno meritamente chiamarsi; da' quali colla posizion d'esser date le velocità, ed i tempi con una arbitraria proporzione delle quantità, che fanno le loro funzioni nelle assegnate linee, si ricaverà in che ragione stieno le forze con le distanze dal centro, ove in vigor d'esse i gravi sono eglino tendenti, ovvero da questo respinti.

In che forma le velocità, e tempi detti si possano trovare, nelle già fatte ricerche, sopra bastantemente si è osservato, che dato il punto, da dove comincia il moto, ed espresso quello spazio, che scorso ei viene, ne resultarono, e queste, e quelli in quantità note per le assunte dall' equazione; il simile metodo per appunto verrà in questi conversi praticato, il che si scorgerà egli dal seguente problema, con cui dal primo assunto, cioè dalla cognita celerità, darassi principio.

PROBLEMA GENERALE.

Tav. 5. Fig. 3. *Sien date le velocità del mobile, per uno ſpazio qualunque ſcorſo, ritrovare le forze, che lo neceſſitano, ed il tempo impiegato.*

259. Dal mobile ſcorrendoſi la retta AC, e ſuppoſto giunto fino in B, dove al ſolito lo ſpazio $AB = s = a - x$ abbia trapaſſato, abbianſi date in cotal punto le velocità, di cui è fornito, per le quantità intromeſſe nell' affezioni del movimento; queſte comecchè date, ci ſomminiſtrano pure le velocità infinitamente piccole, per lo ſpazietto elementare $ds = -dx$; per lo che dall' equazion delle forze in detto punto, quale è, ſecondo le premeſſe nozioni, $-f = \frac{udu}{dx}$, per le celerità date nello ſcorrere l' elementare ſpazietto ds aſſegnato, in cui queſte s' acquiſtano, riſulteranno le forze predette, date egualmente. Laonde queſta ſervirà per la formula generale, nella quale introdotti i reſpettivi valori delle velocità, ci ſomminiſtrerà la forza ricercata, dataci per l' aſſegnati ſpazj, come con gli eſempj vedraſſi manifeſeſtamente. Se queſta poi riſulterà di ſegno poſitivo affetta, ſarà quella, che aſſunta fu per la centrale, ſecondo il principato metodo, ſe viceverſa poi ella avrà il ſegno al preſcritto contrario, ſarà l' altra, cioè la repulſiva, conforme al num. 211. ſi è chiaramente rilevato.

260. Dalla ſolita legge $dt = -\frac{dx}{u}$, s'oſſerva nel caſo di aſſegnata velocità, che per lo ſpazietto $-dx$ eſſendo queſta nota, noto pure ſarà il tempo in cui queſto ſi ſcorre; ſicchè volendolo, ſi ritroverebbe come ſopra

ſopra nelle dirette quiſtioni ſi è fatto, mentre dalle ritrovate velocità veniva determinato; le quali nel caſo preſente date ſi aſſumono, ſenza aver duopo di ritrovarle, e perciò ſi tralaſcerà il farne del tempo ricerca ne' caſi ſeguenti, che tratterannoſi, poichè il metodo fu là baſtantemente indicato.

ESEMPIO I.

261. Primieramente pongaſi, che la ſemplice velocità data, ſia eguale alla ragion dimezzata dello ſcorſo ſpazio, cioè $\frac{uu}{2} = a - x$; differenziando, ne avremo $u\,du = -dx$, e così il valore di udu ſoſtituito nella formula, che ci deve far riſultare le forze cercate, e ſu riferita, che è $-f\,dx = u\,du$, verrà $f = 1$; che ciò viene a dirci lo ſteſſo, che le forze ſono coſtanti. Ed in fatti quando che ſi ſciolſe il Problema diretto num. 213., dove coſtanti le medeſime aſſunte furono, le velocità, che quì per date ſonoſi preſe, ivi a contrario riſultarono.

COROLLARIO I.

262. Facendoſi il ſuppoſto dell' $x > a$ nella precedente eſpreſſione delle velocità, onde abbiaſi $\frac{uu}{2} = x - a$, verrebbe differenziandola, $u\,du = dx$; ſicchè parimente ſoſtituendola ſi produrrebbe, che $-f = 1$, cioè egualmente coſtante la forza, ma però negativamente, volendoci con ciò indicare, che ſarà ella repulſiva, il che fu ſcorto parimente al num. 215. dove preſa l'accennata repulſiva, reſultavano le velocità ſecondo il preſente ſuppoſto. Onde è che ne' caſi, dove eſemplificheraſſi de Proble-

blemi converſi, prendendoſi per date quelle velocità, che ne' diretti all' oppoſto trovate furono, s'inferiranno quelle ragioni delle forze, che cercanſi, tali, e quali, ch' in quelli per date ſi aſſunſero, quel, che ci confermerà come per una riprova l'aggiuſtatezza del metodo.

COROLLARIO II.

263. In luogo della ſudduplicata degli ſcorſi ſpazj, ſieno le nominate velocità eguali a i medeſimi, ma ſemplicemente preſi, cioè $\frac{uu}{2} = \overline{a-x}^2$; onde $udu = -2adx + 2xdx$, e ſoſtituendo un tal valore come ſopra, ſarà $-f = -2a + 2x$, ovvero $f = 2a - 2x$, dove avrebbeſi, ſecondo ciò, un valore delle forze ai ſemplici ſcorſi ſpazj eguale; il che però ſi oſſervò al num. 245., che mai accader puote, per le ragioni in tal luogo apportate.

COROLLARIO III.

264. Eſſendo $\frac{uu}{2} = \overline{a-x}^3$, e perciò col differenziare venga egli $udu = -3aadx + 6axdx - 3xxdx$, al ſolito ponendo un tal valore delle velocità per averſi le forze, verrà $-f = -3aa + 6ax - 3xx$, dove in ſuppoſizione, che queſte foſſero tali, come quì ritrovanſi, qualora ſi conſideraſſe, che il corpo ſteſſe in A, dove $x = a$, ſarebbe $f = F = o$; cioè impoſſibile ad eſſer tal caſo di poter produrſi le velocità, che aſſunte ſonoſi, quando dall' infinita tardità il corpo moverſi debba, come in fatti ſupponeſi, poſciachè in detto punto A non avrebbeſi nel mobile forza alcuna; onde come nell' antecedente Co-

Corollario, impossibile avrassi il moto; e ciò avrà l'applicazione eziandio per qualunque altra ragione delle celerità con gli scorsi spazj direttamente presi, a potestà maggiore della quì indicata elevati.

COROLLARIO IV

265. Se meno che d'$\frac{1}{2}$, cioè della ragion suddupla, sia l'esponente del trapassato spazio, al quale suppongasi esser sempre la semplice velocità proporzionale, e sia per esempio $\frac{uu}{2} = \overline{a-x}^{\frac{1}{2}}$, al solito avremo $u\,d\,u = \frac{-dx.\overline{a-x}^{\frac{1}{2}-1}}{2} = \frac{-dx}{2.\overline{a-x}^{\frac{1}{2}}}$; laonde surrogando nella formula generale della forza secondo il consueto, ne verrà $f = \frac{1}{2.\overline{a-x}^{\frac{1}{2}}}$; e volendosi sapere qual valore nel punto di quiete A abbiasi della medesima, ove sempre, è $f = F$, ed $x = a$, si vedrebbe, che $f = \frac{1}{2.\overline{a-a}^{\frac{1}{2}}} = \infty$, vale a dire ch' infinita la potenza risulterebbe.

COROLLARIO V.

266. Seguendo a supporre, che le velocità agli scorsi spazj sien proporzionali, ma nella reciproca de' medesimi a qualunque dignità elevati, e sieno così supposte, $\frac{uu}{2} = \frac{1}{a-x}$, hassi ch' ella è dipoi la differen-

renza $u\,du = \frac{dx}{a-x}$: ficchè parimente foftituendo, fi avrà $f = \frac{-1}{a-x}$; e fe porremo adeffo il grave in A, come poco anzi, ei verrà $f = \frac{-1}{0} = \infty$, cioè infinita altresì, come nel Corollario precedente, il che feguirebbe eziandio in ogni altro cafo di proporzione reciproca fopraddetta.

S C O L I O.

267. Da quanto fin quì fi è detto adunque ne nafce dimoftrazione evidente, che le femplici velocità colli fpazj fcorfi non poffono ftare altrimenti, fe non che nella ragion fudduplicata diretta de' medefimi, come al prefato Efempio 1. che è quella legge già ftabilita dal Galileo, ed incontraftabile; poichè coftando dal Corollario 2. e 3. precedenti, che impoffibile diviene il moto, fe la velocità fia eguale agli fcorfi fpazj direttamente affunti, elevati alla poteftà maggiore d' $\frac{1}{2}$; e viciverfa poi vedendofi dal Corollario 4, e 5, che ftando la celerità con i predetti fcorfi fpazj in minor ragione, che della fudduplicata, o pure in qualunque altra reciprocamente, nel punto A, dove d' infinita tardità dotato abbiam fuppofto effere il grave, la forza infinita diverrebbe, che ciò repugnava all' ipotefi del Galileo; dunque come fi è detto, in altra maniera, ch' in quella da effo fiffata, reftando le fue fuppofizioni, non poffono avere le celerità con effi la loro ragione.

ESEM-

ESEMPIO II.

268. Prendasi la Parabola Apolloniana, dell' equazione $a x = u u$, dove in qualsivoglia punto dell'asse, o spazio $A B$, le rispettive ordinate sien quelle, che ci dieno le velocità; date queste tali celerità, avrannosi pure l'accrescimenti loro infinitamente piccoli, sicchè differenziando, verrà $a d x = 2 u d u$, e perciò num. 259. ponendo questo valore, ne risulterà la forza $-f = \frac{a}{2}$, cioè le forze diverranno costanti, e proporzionali alla metà del parametro, e saranno eziandio repulsive, sesecondo gli avvertimenti premessi. Imperocchè fatto vertice in A, e col parametro detto, descritta la Parabola $A N$, le forze in qualunque punto B, alla suddetta metà di parametro sempre eguali saranno. Nella forma poi che l'equazione alla parabola sopraccennata fu supposta, così alla stessa curva di qualunque grado assumendola, si ricaverebbero le varie proporzioni delle forze prese a cercare. Tav. 5. Fig. 5.

ESEMPIO III.

269. Sia la velocità espressa per l'ordinata all'Iperbola fra gli asintoti, in supposizione, che il corpo movasi in un d' essi, cioè per $x u = a b$ ella si rappresenti, quindi avrassi $u d x + x d u = o$, cioè $d u = -\frac{udx}{x}$; e sostituendo, $-\frac{fdx}{u} = -\frac{udx}{x}$, o sia $f = \frac{uu}{x}$, che è la forza positiva, o centrale che dir si voglia.

ESEMPIO IV.

270. L'equazione al circolo $aa - xx = uu$ sia quella, che con l'ordinata esprima le date velocità, la quale applicata viene ad esser, come vedesi, una tal funzione delle distanze; e perciò col differenziare, $-xdx = udu$; onde viene $-fdx = -xdx$, vale a dire $f = x$, la qual forza è centrale, ed all'ascissa, che è la distanza dal centro proporzionale egli viene, che ciò tutto concorda con il num. 217.

COROLLARIO I.

271. Se nella equazione medesima si fa positiva la x, affinchè sia $xx - aa = uu$, e che allora le velocità sien date per l'ordinata dell'iperbola equilatera, operando al solito, viene $-f = x$, cioè da positiva in negativa convertesi la potenza, ovvero in repulsiva, e ciò ei conviene col diretto num. 219.

ESEMPIO V.

272. Se venissero date per l'equazione direttamente ricavata al num. 221. le quali sono $\frac{u^2}{2} = \frac{a^3 - x^3}{3}$, avrebbesi $udu = -xxdx$, sicchè $f = xx$, laonde saranno ritrovate essere al quadrato delle distanze proporzionali, e tali assunte furono num. citato, quando che le velocità dette a contrario produssero.

ESEM-

ESEMPIO VI.

273. Sia la velocità data, quella al num. 223. ritrovata, disegnata per un'equazione alla Logistica del secondo grado, cioè $\frac{uu}{2} = la - lx$, onde che ne venga poi $udu = \frac{-dx}{x}$ differenziando; talchè ponendo il valore nella solita formula delle forze, sarà $f = \frac{1}{x}$; vale a dire le medesime in proporzione reciproca delle semplici distanze dal centro, e verrà ad esser la centrale, come effettivamente tale fu supposta nel diretto Problema.

ESEMPIO VII.

274. Vengan date per l'equazione $\frac{uu}{2} = \frac{a-x}{ax}$; mentre poi differenziate, risultino $udu = \frac{-axdx - aadx + axdx}{aaxx}$, le quali altrimenti sostituite, ci somministrano la forza, $-fdx = \frac{-axdx - aadx + axdx}{aaxx}$, cioè $f = \frac{1}{xx}$, essendo la centrale, ed in ragione reciproca de'quadrati delle distanze dal centro, che confronta in tutto, come al num. 226.

ESEMPIO VIII.

275. Espresse pure per l' equazione $uu = \frac{aa - xx}{aaxx}$,

 sono

ſono le differenze $udu = \frac{-aax^3dx - a^4xdx + aax^3dx}{a^4x^4} = \frac{-dx}{x^3}$; ſicchè ſarà la forza, ſurrogando come al ſolito, $f = \frac{1}{x^3}$, cioè ſimile come al num. 232. fu aſſunta direttamente. I quali dichiarati antecedenti eſempj ſono i converſi effettivamente, come oſſervaſi, perchè in queſti le quiſtioni, che ne' diretti ſi ritrovarono, ſonoſi per date ſuppoſte.

ESEMPIO IX.

Tav. 5. Fig. 6. 276. S'eſprimano le velocità per un' ordinata all' Eliſſi dell' equazione $uu = \frac{p}{2a} \times \overline{aa - xx}$, riferita al parametro, e dove le aſciſſe preſe vengono dal centro B, come ſcorgeſi dall' equazione. Pertanto ſi avrà da queſta col differenziare, $udu = \frac{-pxdx}{2a}$, e col ſoſtituire, $-fdx = \frac{p}{2a} \times -xdx$, e non curate le coſtanti, poichè la ragione delle diſtanze proporzionali alle forze ricercate, punto non alterano, avremo $f = x$, cioè ſtarà con la retta BS la forza centrale in proporzione.

COROLLARIO I.

277. Nella figura ſteſſa preſe l'aſciſſe dal vertice C, e fatto il diametro traſverſo $AC = 2a$, e $CS = x$, verrà

rà l'equazione ſua al parametro riferita, $uu = \frac{p}{2a} \times \overline{2ax - xx}$ conforme coſta, e perciò ſarà $udu = \frac{p}{2a} \times \overline{adx - xdx}$; e ſurrogando tale eſpreſſione delle velocità nella formula ſopra indicata, avrem per le ricercate forze $-f = a - x$, ovvero $f = x - a$; ma l'interpoſta fra il centro B dell' Eliſſi, ed il punto S, cioè la BS, è deſſa $= x - a$; ſicchè la forza ſarà a queſta medeſima predetta retta proporzionale.

S C O L I O.

278. Si è viſto ne' caſi precedenti, che le date velocità, le potenze han prodotte date, ed aſſegnate egualmente con qualche funzione degli ſpazj, in virtù del fiſſato canone $-fdx = udu$, poſciachè ritenevano con tali accennati ſpazj il loro rapporto. Poſſono altronde però in egual maniera al ritrovamento delle potenze condurci le velocità ſteſſe date, qualora proporzione ritengano, ovvero che qualche funzione eſſe ſieno de' tempi eziandio, adoprando a tale oggetto altresì l'altro diviſato, e noto canone $fdt = du$. Laonde valendoſi generalmente della poteſtà n, come dignità del tempo, qual diſtanza riguardato, e a cui eſſa velocità venga riferita, ſe ne inferiranno in queſta poſizione eziandio le ſpecifiche leggi, ſiccome vedremo, il che ſervirà tanto più per non dubitar delle teoriche ſu tal propoſito, dall' incomparabile Galileo ſtabilite.

P R O B L E M A G E N E R A L E.

Abbianſi date le celerità del mobile dalla quiete in A par-

Tav. 6. *A partito, e che ſcorra per la diſtanza AC ſignificante*
Fig. 1. *il tempo, ricavarne le forze, e trapaſſati ſpazj.*

279. Servendoſi pertanto delle ſolite denominazioni d' $AC = a$, ed il tempo fino in B trapaſſato $= t = a - z$, coll' averſi fatto $CB = z$, la velocità parimente $= u$; avremo, conforme è noto $- f dz = du$. Or dunque ponendo che la velocità abbiaſi al tempo in qualche forma proporzionale, cioè $u = \overline{a - z}^{\,n}$, produceſi differenziando, $du = n . \overline{a - z}^{\,n-1} - dz$, e ſoſtituendo in cambio di du nella formola citata, haſſi $f = n . \overline{a - z}^{\,n-1}$; ed ecco che ne riſulteranno le forze nella ragion del tempo, ed in quella proporzion del medeſimo, che alla dignità n s' attribuirà di valore.

280. Sta ſempre fiſſo che $dt = \frac{ds}{u}$, e perchè $dt = - dz$, rieſcirà $- u dz = ds$: di più ponendovi l' equivalente della velocità ſuppoſta data, e eſpoſta nel precedente num. ſi è $- dz . \overline{a - z}^{\,n} = ds$, donde poi parimente gli ſpazj cercati avrannoſi noti, e queſti per qualche funzione de' tempi.

E S E M P I O I.

281. Fatta ſia $n = 1$, che ciò ſignifica d' eſſer le velocità $u = a - z$, cioè come il tempo ſemplicete preſo, la forza ſopra enunciata diviene $f = n . \overline{a - z}^{\,0} = 1$, vale a dire, ch' ella è coſtante, e però per converſo conchiudeſi per appunto ciò che dal Galileo fu ſtabilito, mentre num. 43. fu ſcorto che tale aſſumendo la forza, le velocità proporzionali a' tempi quì accennati produſſe.

282.

282. Lo ſpazio altronde in tal ſuppoſto viene egli ad eſſere $-adz + zdz = ds$, che integrando dipoi, $zz + A = s$, e facendo $s = o$, dove la $z = a$, haſſi $A = \frac{-aa}{2}$, quindi $2s = aa - 2az + zz = tt$, cioè proporzionale al quadrato de' tempi, che ſi è giuſtamente il caſo della potenza coſtante num. 53.

E S E M P I O II.

283. Venga ſuppoſta $n = 2$, o vogliam dire $u = \overline{a - z}^2$; che ſarebbe la poſizione delle velocità a' quadrati del tempo ſcorſo proporzionali. In tal caſo, per eſſer $du = -2adz + 2zdz$, l' eſpreſſione generica della forza ſu riferita, rieſce $f = 2a - 2z$. Ma ponendoſi nel principio del movimento il corpo, dove diventa $z = a$, ſarebbe primieramente il ſuppoſto della velocità aſſegnata, $u = o$, ed in ſecondo luogo la forza pure $f = o$. Dunque ſenza velocità, e ſenza forza non potraſſi dare al moto principio, quindi il moto ſuddetto impoſſibile. Se in vece della proporzione già data della celerità col tempo, altra, a maggior dignità ſe ne aſſegnaſſe, varrà ſempre il prefato raziocinio. Laonde ecco che non altrimenti che del diviſato canone dal ſopraccitato Galileo, con forza coſtante, e dalla quiete partito, potranno ſtare in ragione le velocità con i tempi ſcorſi, qual fu, come ſi è viſto più volte, di ritener direttamente con eſſi la ſemplice proporzione.

E S E M P I O III.

284. Fatto il caſo della dignità n minor dell' unità,

nità, e sia per esempio $n = \frac{1}{2}$, volendo ciò dire che la velocità data ponesi nella suddupla ragion del tempo, cioè $u = \overline{a - z}^{\frac{1}{2}}$, e $du = \frac{1}{2} \times \overline{a - z}^{\frac{1}{2} - 1} - dz$, viene in tal forma l'indicata forza $f = \frac{1}{2} \times \overline{a - z}^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{a - z}}$. Laonde ponendo come al solito esistente nel punto A il grave, dove è $z = a$, riesce $f = \frac{1}{2\sqrt{a - a}} = \frac{1}{\sqrt{o}} = \infty$; e ciò spiega, che nel punto predetto, di forza infinita è desso affetto. Questa posizione si è contro l'ipotesi del Galileo, la precedente, in tutta la sua estensione, sa impossibile il movimento; dunque sempre sta che le ragioni, ed i canoni dal medesimo stabilite, sono eglino legittimamente fissati. Se in oltre al meno che d' $\frac{1}{2}$ s' estendesse l' ipotesi, le illazioni si ricaverebbero alla presente uniformi, come è facil cosa vederlo col maneggiar l' equazione, nella forma alla fatta consimile.

S C O L I O.

285. Si omette l' esemplificar da vantaggio, stimando sufficienti gli esempj addotti per formar chiara idea delle soluzioni di tale specie; per lo che si procederà a trattare l'altro converso Problema, per rapporto a quello delle date forze, ove dati i tempi suppongonsi.

PRO-

PROBLEMA GENERALE.

Dati i tempi in un punto arbitrario dello ſcorſo ſpazio, o cammino, ricavarne le velocità acquiſtate, e le forze. Tav. 6. Fig. 1.

286. Dal punto di quiete A giunto il mobile fino in B, trapaſſato avendo lo ſpazio $AB = a - x$, come fin quì raziocinato abbiamo, aſſumendoſi dato il tempo, qual ſia $= t$ in cui egli ſi ſcorre, ne dee ſeguire altronde, che per l'elementare ſpazietto $Bb = -dx$ noto ei s' abbia ancora l' iſtante di tempo $= dt$. Laonde nell' equazione $dt = -\frac{dx}{u}$, avendoſi il tempo infiniteſimo dt nello ſcorrerſi lo ſpazietto $-dx$, verranno date le velocità.

287. Dagli eſempj antecedenti, ſecondo ſi è ſcorto, dalle celerità date, ſarà in poter noſtro averſi la forza, e così ſciolto avremo il Problema, relativamente a deſſa pure.

ALTRIMENTI.

288. Si differenzj di nuovo la nominata equazione $udt = -dx$, col far perſiſtere il tempo coſtante, perchè dato ci viene, e verrà $dudt = -ddx$, o ſia $du = -\frac{ddx}{dt}$; di poi, come è noto, avendoſi $fdt = du$, quindi ſe tal valore delle velocità iſtantanee venga ſoſtituito, ſi ridurrà ad eſſere $f = -\frac{ddx}{dt^2}$; ed eccone ritrovate le forze immediatamente da' tempi dati, che per gli ſpazj aſſegnati ſpeſi furono; la quale preſcritta

formula sarà ella la generale, che servirà per altro metodo delle soluzioni seguenti.

289. La velocità sarà data eziandio, poichè dati i tempi nel trapassarsi lo spazio, e questa indipendentemente dalla ritrovata equazion delle forze, servendosi del solito valore $dt = -\frac{dx}{u}$, come si è notato nella soluzion del Problema presente, nella maniera prima divisata.

ESEMPIO I.

290. Vogliasi vedere primieramente, che cosa risultino le velocità, e le forze coll' assumere i tempi dati, come una qualsisia funzione dello spazio, e questi alla generica potestà n elevati; cioè $t^n = a - x$, o sia dividendo per la dignità detta n, $t = \overline{a-x}^{\frac{1}{n}}$; differenziata tale equazione, verrà $dt = \frac{1}{n} \times \overline{a-x}^{\frac{1-n}{n}} - dx$, o vogliam dire $-\frac{dx}{dt} = n \, . \, \overline{a-x}^{\frac{n-1}{n}}$, che per essere $-\frac{dx}{dt} = u$, siccome costa, ricavasi perciò che $u = n \, . \, \overline{a-x}^{\frac{n-1}{n}}$, valore della celerità cercata.

291. Dovendosi ora ricavarne parimente la forza, s'otterrà ciò col quadrare, e poi differenziare la velocità già detta, la quale è $udu = \overline{nn-n} \times \overline{a-x}^{\frac{n-2}{n}} - dx$; imperciocchè valendosi del metodo indicato alla soluzione prima della Conclusione presente, ch' importerà di surrogare nella legge stabilita $-fdx = udu$, avrassi $f =$

$f = \overline{nn-n} \times \overline{a-x}^{\frac{n-2}{n}}$; donde poi ad arbitrio determinando la quantità dell' esponente n, avremo e velocità, e forza ancora, ambedue tali ricerche note, e dateci in virtù dello spazio assegnato.

COROLLARIO I.

292. Si può altronde la forza independentemente dalle velocità investigare; e ciò col prender l' equazione poco anzi num. 290. enunciata $-\frac{dx}{dt} = n.\overline{a-x}^{\frac{n-1}{n}}$, la quale alla seconda differenza passata, restando dt costante, riesce $-\frac{ddx}{dt} = \overline{n-1} \times \overline{a-x}^{\frac{-1}{n}} - dx$. Onde ripigliando la generica equazione della soluzione secon da, ch è $f = -\frac{ddx}{dt^2}$, sostituendo, viene $f = \overline{n-1} \times \overline{a-x}^{\frac{-1}{n}} - \frac{dx}{dt}$; in cui finalmente surrogando anche il valore di $-\frac{dx}{dt}$, quì soprascritto, risulta $f = \overline{nn-n} \times \overline{a-x}^{\frac{n-2}{n}}$, quale espressione, ella è la medesima del num. antecedente, nella maniera prima ritrovata, come ben vedesi.

COROLLARIO II.

293. Se la $n=1$ vien supposta, in tal caso le velocità all' Esempio 1. accennate, $u = n.\overline{a-x}^{\frac{n-1}{n}}$, diverranno $u = \overline{a-x}^{0} = 1$, cioè costanti; volendo con ciò indicarsi, che il moto sarà l' equabile, che fu il primo

divisato, num. 18. E le forze ricercate, espresse nell' equazione quì sopra al num. 291. sono $f = o.\overline{a-x}^{\frac{1-1}{1}} = o$, cioè nulla, come in fatti tali esser debbono, quando le velocità sono costanti; poichè mai invariabili resterebbero queste, quando qualche energia vi avesse di forza: come in realtà perchè tali sempre ad esser continuino, nel moto equabile disegnato, rimossa, o distrutta la potenza venne supposto.

COROLLARIO III.

294. Fatta $n = 2$, sarebbe la velocità suddetta; $u = 2.\overline{a-x}^{\frac{1}{2}}$, o sia egli in ragion sudduplicata degli scorsi spazj, che è la legge del moto uniformemente accelerato stabilita, e più volte ricordata.

Così verrà in tal supposto la forza, $f = 2.\overline{2-2} \times \overline{a-x}^{\frac{2-2}{2}} = 2.\overline{a-x}^{0} = 1$, la quale è costante, talmente dovendo avvenire nel caso del moto accelerato, allorchè le velocità antecedenti espresse stanno nell' indicato rapporto, siccome ebbesi num. 261.

COROLLARIO IV.

295. Qualora facciasi $n = \frac{2}{3}$, la velocità solita riesce $u = \frac{2}{3} \times \overline{a-x}^{\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt{a-x}}$; ed altrimenti la forza, $f = \overline{\frac{4-2}{3}} \times \overline{a-x}^{\frac{\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3.\overline{a-x}^{3}}$. Assegnando altri valo-

valori alla dignità n, potrebbonsi ricavarne altre proporzioni delle due proposte ricerche, ma si omette per brevità.

E S E M P I O II.

296. Venga dato il tempo espresso per un arco di circolo, o pur da un angolo, qual sia egli il ritrovato al num. 120. cioè $t = \int \frac{-dx}{\sqrt{aa - xx}}$, e $dt = \frac{-dx}{\sqrt{aa - xx}}$; per aversi $dt = -\frac{dx}{u}$, dal consueto canone, sostituendo in luogo di dt il valore del dato tempo, risulterà la velocità ricercata, $u = \sqrt{aa - xx}$, che è la stessa al num. citato rinvenuta: come appunto dovranno esser le forze eziandio, che or si cercano, quelle, che ivi a contrario supposte furono, nella forma medesima, che nel converso delle velocità abbiam veduto avvenire, cioè di ritrovar tutto ciò, che nelle ricerche dirette veniva supposto.

297. Differenziando adunque la quì enunciata celerità, onde sia $udu = -xdx$, col metodo, che sopra praticato venne nella soluzion del converso, ove date eran le velocità, sarà sempre in poter nostro d' avere la ricercata forza, conforme si è avvertito, al solito modo surrogando nella formula $-fdx = udu$; e perciò al caso presente, è la forza, $f = x$: il che sempre potendosi fare, s' intenderà ora, per ogni altra volta notato, che talmente rinvenir la potenza detta piacesse.

CO-

COROLLARIO I.

298. Per procedere a norma della seconda soluzione, indipendentemente da questa, differenziando di nuovo il dato tempo, e ritenuto egli costante, sarà $\frac{x\,dx^2}{aa-xx}=-ddx$; onde num. 288. sostituendo nella formula stabilita, si avrà $f=\frac{x\,dx^2}{dt^2\cdot aa-xx}$, e di nuovo il valore di dt^2, ch' hassi all' Esempio 2. già dato surrogando, verrà $f=x$, come sopra.

ESEMPIO III.

299. Abbiansi i tempi così dati, $t=\int x\,du$, e $dt=x\,du$, sostituendo in luogo di dt, nella solita espressione $dt=-\frac{dx}{u}$, sarà $-\frac{dx}{u}=x\,du$, cioè $u\,du=-\frac{dx}{x}$, ed $\frac{uu}{2}=l\frac{a}{x}$ per la velocità cercata.

300. La differenza seconda de' tempi elementarj soliti $dt=-\frac{dx}{u}$ in oltre prendasi, e saranno, stando essi costanti, $du\,dt=-ddx$; imperciocchè sostituendo per aver la forza, nella formula del secondo metodo, verrà $f=\frac{du\,dt}{dt^2}=\frac{du}{dt}$, ed i tempi dati sostituendovi num. antecedente, verrà $f=\frac{1}{x}$, cioè le forze in reciproca ragione delle distanze, siccome si ha num. 223.

ESEM-

ESEMPIO IV.

301. Se per l' applicata alla Cicloide il tempo prendasi dato, qual sia il ritrovato al num. 227. $dt = \frac{-x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}$; e che quindi poi sia, in $dt = -\frac{dx}{u}$ surrogando, $\frac{dx}{u} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}$, hassi la velocità $u = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, quale ella è la medesima del num. 226.

302. Passando alle seconde differenze, quadrato il tempo costante, avrassi $o = \frac{adx^2 - xdx^2 + 2axdxddx - 2xxdxddx + xdx^2}{\overline{a-x}^2}$, cioè riducendo, $-ddx = \frac{adx^2}{2 \times ax - xx}$; sicchè surrogando, risulterà per la forza, che cercasi, $f = \frac{adx^2}{2dt^2 \times \overline{ax-xx}}$, dove sostituendo il valore di dt^2 somministratoci dall' ipotesi, ne risulta $f = \frac{a}{2xx} = \frac{1}{xx}$ omesse le costanti; si veda num. citato 226. che direttamente confronta.

ESEMPIO V.

303. L' ordinata al circolo del raggio $= a$ sia ai tempi proporzionale, sicchè $\sqrt{aa-xx} = t$; onde venga $dt = \frac{-xdx}{\sqrt{aa-xx}}$, e perciò ripetendo che $dt = -\frac{dx}{u}$, col so-

sostituire riducesi $-\frac{dx}{u} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$, cioè $u = \frac{\sqrt{aa-xx}}{x}$ per la velocità che si cerca.

304. Col prender poi le differenze seconde del dato tempo, come al solito, verrà $o = \frac{-dx^2 - x\,ddx\,\sqrt{aa-xx}}{aa-xx}$ $\frac{-xx\,dx^2}{\sqrt{aa-xx} \times aa-xx}$; o sia facendo le necessarie riduzioni, $-ddx = \frac{aa\,dx^2}{x \times aa-xx}$, laonde sostituendo un cotal valore nella formula della forza $f = -\frac{ddx}{dt^2}$, con di più l' altro del dato tempo in questa supposizione, risulta $f = \frac{aa}{x^3}$, che è per appunto l' ipotesi supposta del num. 232.

COROLLARIO I.

305. Se in cambio di assumere per i tempi dati l' ordinata suddetta, pongasi esser quella dell' Iperbola, che i tali esprima, cioè $xx - aa = tt$, il metodo sarebbe lo stesso per ritrovar le quistioni, che cercansi; avvegnachè pure a qualunque altro caso, in cui per ordinata di curva espressi fossero, sia questo applicabile.

SCOLIO.

306. Se per archi circolari, o per qualunque spazio, ovver superficie di curve, rettificazioni &c. eglino

no eziandio dati fossero i tempi, si possono egualmente Tav. 6. Fig. 2. ritrovare le velocità, e forze come sopra: imperocchè prendasi per la curva AN una qualunque, nel di cui asse AC viaggiando il mobile, sia conforme fin quì si è praticato, lo scorso spazio $AB = s = a - x$, e l' ordinata $BQ = y$, ed in detto punto B, o in qualunque altro preso a piacere, abbiasi il tempo in primo luogo proporzionale, o vogliam dire datoci per l' arco AQ, onde $t = AQ$, e perciò dato egualmente l' infinitesimo $QS = dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; non varierà in altro la soluzione del Problema in questo caso da quella del già indicato num. 286., che nell' equazion generale $-\frac{dx}{u} = dt$, si sostituirà il valore del tempo elementare dato, e perciò al fatto presente si ricaverà, che $-\frac{dx}{u} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, o sia $u = \frac{-dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, donde ci sarà noto il valore della ricercata velocità, quando che si sostituiscano i respettivi valori, che dall' equazione particolare della Curva già si hanno. Lo stesso raziocinio s' applichi per ritrovare la forza, posciachè valendosi della formula a questo proposito ne' superiori casi fissata, quale ella è $f = \frac{-ddx}{dt^2}$, e sostituendovi in essa i quadrati de' tempi dati, ne risulterà $f = \frac{-ddx}{dx^2 + dy^2}$; dove quivi parimente i necessarj respettivi valori sostituendo, si ritroverà la medesima, che tutto ciò, come vedrem cogli esempj, si scorgerà manifestamente.

ESEMPIO VI.

307. Essendo la Curva il circolo dell' equazione $aa - xx = yy$, sarebbe il caso dell' Esempio 2. poco anzi supposto; onde null'altro sarà d' uopo, che nell'espressione $-\frac{dx}{u} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, Scolio precedente, sostituir dovrassi il valore di dy^2, il quale ci dà l'equazion della curva stessa, e verrà altronde la velocità $u = \sqrt{aa - xx}$, come ivi, trascurata l' a costante.

308. Per le forze poi, avvegnachè sia $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, così con la sostituzione medesima, i tempi si ridurrebbero a quei del citato Esempio, cioè $dt = \frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$, onde poi avrebbesi, facendo le necessarie operazioni, come al num. 298. $f = x$, siccome parimente fu al ricordato numero ritrovato.

ESEMPIO VII.

309. Supponendo che AN sia la Parabola ordinaria col parametro p descritta, per aversi $AB = a - x$, verrà la di lei equazione $pa - px = yy$, come altresì differenziando, $\frac{-pdx}{2\sqrt{pa - px}} = dy$: e perciò l' equazione del tempo dato $-\frac{dx}{u} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt$, posto che in essa si pongano i valori, che da dy^2 risultano dall' equazion della supposta curva, ci presenterà per le velocità cercate, $uu = \frac{4a - 4x}{4a - 4x + p}$.

310.

310. Dalla velocità trovata, puossi, conforme sopra venne notato, rinvenire la forza; ma valendoci al presente del secondo metodo, che dalla prefata celerità non dipende, si differenzierà nuovamente il soprascritto valore $\frac{pdx^2}{4a-4x} = dy^2$, dall' equazione ricavato, e verrà egli $dyddy = \frac{2padxddx - 2pxdxddx + pdx^3}{8\times\overline{a-x}^2}$; e siccome poi si stabilisce per dato il tempo $dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$, differenziando di nuovo, e dt ritenuto costante, ne avremo $dyddy = -dxddx$; onde surrogando in luogo di $dyddy$ nell' espressa equazione, ricavasi che $-ddx = \frac{2paddx - 2pxddx + pdx^2}{8\times\overline{a-x}^2}$, cioè trattandola come devesi, $-ddx = \frac{pdx^2}{8\times\overline{a-x}^2 + 2pa - 2px}$; e però surrogando nella specifica, e nota formula, risulterà $f = -\frac{ddx}{dt^2} = \frac{pdx^2}{dt^2\times 8\times\overline{a-x}^2 + 2pa - 2px}$, in cui finalmente ponendovi il valore di $dt^2 = \frac{4adx^2 - 4xdx^2 + pdx^2}{4a-4x}$, che hassi in virtù della sostituzione dall' equazion della curva, riducesi che $f = \frac{2p\times\overline{a-x}}{\overline{4\overline{a-x}^2 + pa - px}\times\overline{4a-4x+p}}$.

SCOLIO.

311. I tali due esemplificati casi ci porgono una sicura, e giusta operazione da potersi ritenere in qualunque altro, che per archi di curve eglino fossero i tem-

tempi proposti, eziandio dati; e perciò lasciando di ulteriormente estendermi, procederò a maneggiare altre ipotesi, d'allorchè ad aere, o vogliam dire spazj curvilinei, o superficie supposti fossero esser dessi proporzionali.

ESEMPIO VIII.

Tav. 6. Fig. 2. 312. Sicchè posto essere la figura medesima, ed il tempo dato prendasi allo spazio AQB esser egli proporzionale, tutta la denominazione delle quantità restando come sopra, si ha per notissimo, che volendosi avere questa tale area, avrassi dal parallelogrammo infinitesimo $Qb = -y\,dx$, cioè secondo il supposto $dt = -y\,dx$; ora prendendosi la formula de' tempi elementarj, già dal moto equabile stabilita, $-\frac{dx}{u} = dt$, facendo la sostituzione, riescirà $-\frac{dx}{u} = -y\,dx$, cioè $u = \frac{1}{y}$, da dove si hanno le velocità: e se in luogo della y vengano poste le quantità, le quali sieno date per l'equazion della Curva, che in ispecie verrà data, avrannosi per esse le velocità indicate.

313. Per ottenersi le forze con la maniera seconda, il tempo dato $dt = -y\,dx$ sia di nuovo differenziato, restando il medesimo costante, e avremo $-ddx = \frac{dy\,dx}{y}$, così che num. 288. sostituendo, verrà $f = \frac{dy\,dx}{y\,dt^2}$, e con di più il valore di dt^2, il quale si ha dall' ipotesi, parimente surrogando, riesce $f = \frac{dy}{y^3\,dx}$; dove quì egualmente ponendovi i valori, che la curva spezialmente asun-

assunta, con la sua equazione ci somministra, verranno date le forze, che prese furono a ritrovare.

COROLLARIO I.

314. Pertanto per la nota Curva abbiasi la parabola dell' equazion nominata sopra $pa - px = yy$; sostituendo in luogo di y, num. 312. eccone per la velocità $u = \frac{1}{\sqrt{pa - px}}$. Parimente la forza del num. antecedente sarà $f = \frac{-pdx}{2dx\sqrt{pa - px}.\,y^{3}} = \frac{-p}{2.\,\overline{pa - px}^{2}}$, sostituendo i respettivi valori dell' equazione.

COROLLARIO II.

315. Essendo la curva il circolo dell' equazione $aa - xx = yy$, diviene la velocità $u = \frac{1}{\sqrt{aa - xx}}$. La forza altronde, surrogando come poco anzi, $f = \frac{-x}{\overline{aa - xx}^{2}}$.

Quanto fin quì abbiamo esemplificato, per concepire il metodo, ch' in altre ipotesi di tempi, o per gli spazj curvilinei, o per Settori dati debba ritenersi, potrà, a mio credere, esser sufficientissimo, e perciò porremo fine a questa prima parte del moto rettilineo nel vacuo, ed alla seconda nel mezzo resistente eseguito procederassi.

PAR-

PARTE II.

Del Moto Rettilineo nel mezzo Resistente.

CAPITOLO I.

Delle Resistenze in particolare considerate.

LE leggi de' movimenti finora nella parte prima, nel vuoto stabilite, ci guideranno all' intelligenza di quei, che nel mezzo resistente, o sia nel fluido qualunque vengon diretti, poichè stabilmente fisse persistono, se non che sarà d' uopo a quella resistenza, ch' il corpo in essi mosso patisce, di presente accomodarle.

316. Ogni Fluido, è indubitabile, che a' gravi ch' in esso son mossi oppone resistenza. Questa poi altresì da diverse cagioni può esser ella prodotta; e primieramente, siccome in ogni materia, costa dall' esperienza, che tutte le sue quantunque benchè minime particelle, come se da un glutine qual più forte, e potente, e quale più spossato affetto fossero, fra loro insiem vincolate, e strette rimangono, così pure da questa tal viscosità, o sia tenacità del fluido eziandio dovrà ripetersi una delle principali cagioni delle resistenze, e della quale nel Capitolo 6. si diede un saggio nella materia molle, e cedente, questa tal resistenza individualmente prendendo a considerare. Oltre a ciò potrà ancora essérvi secondariamente altra causa produttrice di queste nominate cotali resistenze, qual sarebbe lo sfregamento, o sia,

come

come altri dicono *attrito* delle particelle medesime ; ed in terzo luogo la *reazione* stessa delle ricordate particelle mosse, tra le quali il corpo movendosi, e forza loro comunicando, s'agiteranno esse, e con il loro scambievole sforzo, dalla forza d'Inerzia prodotto, genereranno al certo una tal qual resistenza. Tutte le addotte cagioni insieme, e forse altre a noi per anco incognite, saran desse, che la prefata resistenza produrranno; sopra di che non farò più lungo esame, estendendomi piuttosto di questa a fissarne le teoriche nel Capo presente.

317. L'addotta prima cagione delle resistenze predette, che fu la tenacità del fluido, gioverà considerarla in ogni parte, e luogo di esso sempre simile, ed uniforme, e perciò eguale a costante, il che forse dal vero non sarà tal posizione molto dissimile.

318. Vedesi pertanto, che movendosi il corpo in un tal mezzo resistente, se maggiore ostacolo, o resistenza incontri, maggiore, l'altre circostanze eguali restando, sarà la diminuzione delle velocità, di cui egli è dotato, ed a contrario con minor resistenza, minore altresì sarà il loro decremento ; da che s'inferisce legittimamente, che la Resistenza del mezzo avrà rapporto con le celerità del mobile, cioè la resistenza stessa sarà una funzione qualunque delle medesime; onde è, che varie ipotesi delle resistenze alle predette velocità proporzionali sogliosi fare, come si vedrà in appresso.

319. Nient'altro operando adunque questa ricordata Resistenza, che in impedire il moto del corpo, che tanto vale a dire, che l'essere ella una forza ritardante, entrerà per conseguenza nel numero delle potenze, conforme dalla Difinizione 18. num. 38. apparisce, e similmente ciò confermasi da quel tanto, che detto abbiamo allorchè la tenacità della materia cedente venne considerata. Omogenea

nea perciò farà la forza di resistenza con la gravità, la quale gravità in fatti lo stesso effetto ella produce, qualora in vigor di essa, salendo il grave, il di lui moto sminuisce, come si è scorto nelle considerazioni antecedenti, de' moti nel vuoto ritardati. E perciò nella forma stessa, che della gravità predetta fu già stabilito, che prender si può, e costante, e variabile nella generazione de' movimenti, tale appunto verrà a supporsi della resistenza de' fluidi, di cui presentemente siam per trattare. Premesso ciò, si passerà nel seguente Esempio a spiegare l'andamento del moto, alla semplice resistenza riportato, prescindendo dall'azione della gravità, o potenza ne' corpi esistente, di che in seguito poi ci toccherà ragionarne nel seguente Capitolo, dove ambedue tali rapporti saran col movimento congiunti.

ESEMPIO I.

Tav. 6. Fig. 3. 320. In un fluido resistente qualunque diretto venga il mobile per la retta $AC = a$, la quale altronde ci rappresenti gli spazj, ovvero i tempi, come più volte notato abbiamo; affetto in oltre sia di velocità iniziale $= c$ per superare la resistenza, esistente in A, e scorso abbia dipoi discendendo, fino in B: assunto lo spazio $AB = s$, e chiamando $CB = x$, sarà perciò $AB = s = a - x$, e lo spazietto minimo $Bb = - dx$. Se la considerazione si portasse sopra la potenza, che a scorrere lo necessita, già avrebbesi $- f dx = u du$, conforme visto si è nella Parte prima più volte; ma quì, perchè dalla potenza si fa astrazione, e soltanto come tale vuolsi considerare la Resistenza, a questa omogenea, pertanto denominata essa $= R$, ed in luogo di f inserendola, ne verrà $- R dx = u du$. Di più la resistenza si è po-

potenza ritardante, che ſcema le velocità ſucceſſivamente, le quali come applicate della curva MON rappreſentar ſi poſſono, e per conſeguenza negative diverranno. Dunque la completa formula rieſcirà finalmente $Rdx = udu$.

321. Se la diſtanza AC faceſſe figura del tempo, nominando allora, ſiccome è noto, $AB = t$, e $CB = z$, ſecondo le fiſſate leggi, nella parte 1. e ſpecialmente num. 249. che $-fdz = du$, applicandovi l'antecedente diſcorſo, avremo, per queſto tal moto in iſpecie, $Rdz = du$.

COROLLARIO I.

322. Per lo ſpazietto, o iſtante Bb ſarà ſempre vero, che la velocità potraſſi invariabile ammettere, laonde i canoni nel vacuo ſtabiliti, cioè che ſia $dt = -\frac{dx}{u}$ in un caſo, e $ds = -udz$ nell' altro, ſaranno egualmente quì veri; e però ſecondo il propoſto aſſunto, potraſſi inferir da' medeſimi quell'affezione, che cercaſi.

ESEMPIO II.

323. In cambio di ſcendere facciaſi il caſo, che dal punto A per la retta AC ſe ne ſalga, donde giunto egli ſia nel punto arbitrario B; nominando $AC = a$, e $CB = x$, come altrove ſi fece, e perciò lo ſpazio ſcorſo $AB = s = x - a$, ci darà l' elementare $ds = dx$. Riflettaſi che la reſiſtenza anch' adeſſo è potenza ritardante, poſciachè ella impediſce egualmente il moto del corpo, quindi negativa dovrà aſſumerſi, come all'eſempio 1. fu praticato, e però nello ſpazio moltiplicata, produce Tav. 6. Fig. 4.

 che

che $- R\,d\,x = u\,d\,u$, la quale espressione è la negativa dell' antecedente, come di fatto esser dee.

324. Se la retta AB indichi il tempo scorso, chiamando $CB = z$, e però $AB = z - a$, riflettendo come al solito, verrebbe $- R\,d\,z = d\,u$

COROLLARIO I.

325. Per aversi in questo caso $d\,x$, e $d\,z$ positivi, dell' equazioni solite del tempo, e spazio infinitesimo, una sarà $d\,t = \frac{d\,x}{u}$, e l' altra $d\,s = u\,d\,z$.

SCOLIO.

326. Conciossiachè notato ei s' abbia poco anzi, che le resistenze esister possono e costanti, e variabili, verrassi con dir ciò a comprendere colla prima intelligenza, ch' elle oppongonsi, in ogni luogo, o parte del fluido, al corpo in esso mosso, egualmente. Succederà dunque questo, allorchè si prenderà a considerare un fluido, che costi di piccioli, ma eguali corpicciuoli, elastici ciaschedun d' essi, sparsi, e situati fra interstizj egualmente disseminati; il qual fluido, non sarà forse lungi dal vero, se riputeremo essere l'aria. Questa resistenza pertanto sul mezzo sempre simile or prendesi a considerare, ed atteso che la tenacità parimente costante si assume, i Matematici perciò lo credono generalmente resistere nella proporzione de' quadrati della velocità, di cui il corpo è fornito, mentre venendo assunte le sue particelle resistenti, ch' agli spazj proporzionali elle sieno, avvegnachè fra interstizj eguali sono disseminate, gli spazj poi al quadrato delle celerità eguali essendo, confor-

forme per più volte notato abbiamo, e perciò per egualianza di ragione, il loro resistere avrà con le predette la medesima ragione, e rapporto. O pure riguardando le resistenze nell' aspetto d' uno sforzo passivo, il quale la velocità non diminuisce, se non che dopo un tale trapassato spazio, o finito, o infinitamente piccolo, che prender si voglia, ne verrà, che lo sforzo dovrà egli avere con questo cotale spazio la proporzione, cioè, come si è detto, al quadrato della velocità sarà desso eguale. Lasciando però ciascuno di crederle resistere in qualunque proporzione delle sopraccennate celerità, l'esprimerò nell' equazione presente $R = \frac{u^m}{b^{m-1}}$; significandosi per il loro esponente m una ragione qualsivoglia, e per la quantità nota b intromessavi, s' intenda salvare l' *omogeneità* de' termini: questa adunque sarà l' espressione, che servirà allora quando verrà a parlarsi del mezzo resistente uniforme, tanto nella considerazione delle pure resistenze, quanto che di queste connesse con la potenza del corpo nel fluido mosso. Del secondo assunto poi, ch' importa esser le medesime variabili, verrà luogo fra poco di doverne parlare.

PROBLEMA GENERALE.

Se nel mezzo resistente uniforme scenda un corpo, e la forza di resistenza ad una dignità qualunque delle velocità suppongasi proporzionale, ritrovare la diminuzione, o vogliam dire il residuo delle velocità, ed i tempi scorsi, in qualsivoglia punto del trapassato spazio. Tav. 6. Fig. 3.

327. Restando ogni denominazione come al num. 320. dell' esempio notato, perchè nello Scolio quivi so-

pra, è $R=\frac{u^m}{b^{m-1}}$, mettendo in luogo di R nell' efpreffione del citato efempio $R\,dx = u\,du$, avraffi $\frac{u^m\,dx}{b^{m-1}} = u\,du$, cioè $dx = b^{m-1}u^{1-m}du$, dove integrando viene $A+x=\frac{b^{m-1}u^{2-m}}{2-m}$; ed effendo $x=a$, in principio del moto, che la velocità rifulta eguàle all' iniziale, cioè $u=c$, la coftante farà $A=\frac{b^{m-1}c^{2-m}}{2-m}-a$, la quale foftituita, verrà $u=\frac{\overline{2-m}}{b^{\frac{m-1}{2-m}}}\times\overline{x-a}^{\frac{1}{2-m}}+c$, ed eccone le già cercate velocità.

328. Sicchè i tempi poi, quefte foftituite, rifulteranno così $dt=\frac{b^{\frac{m-1}{2-m}}.-dx}{\overline{2-m}\times\overline{x-a}^{\frac{1}{2-m}}+c}$.

C O R O L L A R I O I.

329. Dando qualfifia valore alla m fe ne ricaveranno i particolari cafi, e perciò fattafi $m=\frac{1}{2}$, ed intromeffo nell' equazione delle ritrovate antecedenti velocità, verranno $u=\frac{3\times\overline{x-a}^{\frac{2}{3}}}{2b^{-\frac{1}{3}}}+c$; ed i tempi altresì $dt=\frac{2b^{-\frac{1}{3}}.-dx}{3\times\overline{x-a}^{\frac{2}{3}}+c}$.

CO.

COROLLARIO II.

330. Sia $m = 1$, si ridurranno allora a queste, $u = x - a + c$; cioè saranno le celerità equivalenti ad una retta linea; il che ci fa sapere, che elle non diverranno funzione alcuna d' un' ordinata alla divisata curva, per andar necessariamente di mano in mano a diminuirsi, e quindi sempre le stesse in qualunque sito resteranno; sicchè nè eguali $= o$, nè pure $= \infty$ potranno esse giugnere ad esser giammai.

COROLLARIO III.

331. Facendosi la $m = o$, avrassi che la velocità è $u = \frac{\overline{2 . x - a}^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}} + c$. Questa tale ipotesi racchiude in se la condizione d' esser la forza di resistenza costante, vale a dire simile alla Gravità sopra la superficie della Terra, mentre genera le velocità, come vedesi, proporzionali alla ragion sudduplicata di quella quantità, che degli spazj scorsi è funzione. Ricavasi ciò parimente dall' equazione $R = \frac{u^m}{b^{m-1}}$ sopraccennata, donde, coll' esser $m = o$, si ha $R = \frac{1}{b^{-1}}$.

COROLLARIO IV.

332. Essendo $m = 2$, cioè le resistenze al quadrato delle velocità proporzionali, che per appunto è quella ipotesi, comunemente supposta la vera da' Meccanici, la già espressa equazione $u^{2-m} - c^{2-m} =$

$2-m$

$\frac{\overline{2-m}}{b^{m-1}} \times \overline{x-a}$, sopra al Problema, produrrebbe le velocità così $1 = 1$, il che nulla ci fa sapere. Per la qual cosa dall' equazione differenziale $\frac{u^m dx}{b^{m-1}} = u du$ sarà di bisogno ripeterle; quindi ripigliandola, col supposto valore assunto della m, viene $\frac{dx}{b} = \frac{du}{u}$. Sicchè sommando, n' esce $\frac{x}{b} + A = lu$; e facendo $u = c$, quando è $x = a$, sarà la costante $A = lc - \frac{a}{b}$, e perciò surrogando, viene $\frac{x-a}{b} = l\frac{u}{c}$. Se q sia la quantità, di cui è il Logaritmo iperbolico $= 1$, cioè $lq = 1$, poste in analogia l'equazioni, abbiamo $1 : \frac{x-a}{b} :: lq : l\frac{u}{c}$, che colla moltiplicazione degli estremi, e medj termini, se ne ricava $l\frac{u}{c} = \frac{\overline{x-a}}{b} lq$, onde hassi $u = c \cdot q^{\frac{\overline{x-a}}{b}}$, operando come deesi, il che è quanto si cercava.

COROLLARIO V.

333. Vi resta d' aversi il tempo dall' espressione $dt = -\frac{dx}{u}$, il quale, perchè l' ipotesi ci somministra $dx = \frac{b du}{u}$, sostituendovi questo valore, risulterà $-dt = \frac{b du}{uu}$

$\frac{b\,du}{uu}$, e poi coll' integrare $\frac{b}{-u} = t + A$: e ſiccome $A = \frac{-b}{c}$, ſupponendo $t = o$, ed $u = c$, viene perciò $-\frac{b}{u} + \frac{b}{c} = t$, dove in luogo delle velocità ponendovi le antecedenti ritrovate, ſono $t = \frac{b - bq^{\frac{a-x}{b}}}{c}$ i tempi preſi a cercare.

COROLLARIO VI.

334. Poichè le ordinate alla curva MON poſsono, nell' ipoteſi preſente, rappreſentare in qualche forma le velocità, facciaſi, che ſia l' iniziale $c = AM = 1$, in tal caſo diverrebbe l' equazione al num. 332. integrata, eſpreſſa così, $\frac{x-a}{b} = lu - l1$, e perchè $-a + x = -s$, e però ſoſtituendo, haſſi $\frac{-1}{b} \times s = lu$; facendo ciò vederci, che lo ſpazio ſcorſo ſarà proporzionale al logaritmo delle velocità reſidue BO, e la curva per conſeguenza ſarà la Logiſtica; e perchè all' infinito eſſa s' appreſſima al ſuo aſintoto AC, e perciò fino a tanto che lo ſpazio in infinito ſcorſo non ſia, non perderà la velocità il mobile, in vigor della reſiſtenza, ch' ad eſso opponeſi.

SECONDO CASO.

335. Allorchè le reſiſtenze vengono applicate nel tempo, col ſupporlo eſpreſso per la medeſima linea AC, venir

venir dee in questa ipotesi $\frac{u^m dz}{b^{m-1}} = du$, secondo il divisato metodo num. 321. e perciò integrando $z + A = \frac{b^{m-1}u^{1-m}}{1-m}$, e come sopra operando, la costante sarà $A = \frac{b^{m-1}c^{1-m}}{1-m} - a$, quindi $u = \frac{\overline{1-m} \times \overline{z-a}^{\frac{1}{1-m}}}{b^{\frac{m-1}{1-m}}} + c$.

336. Essendo $ds = -udz$, sostituendovi le velocità antecedenti, avrannosi gli spazj, che si cercano in questa equazione $ds = \frac{-dz \times \overline{1-m} \times \overline{z-a}^{\frac{1}{1-m}}}{b^{\frac{m-1}{1-m}}} - cdz$, in cui con dare diversi valori alla dignità m, come sopra si è praticato, varie leggi ricaverebbonsi d'ambedue le affezioni cercate.

COROLLARIO I.

337. E' superfluo l'andare esaminando in ambedue i casi trattati il moto del corpo ascendente, perchè il metodo spiegato viene a tal fatto applicato facilmente, a chi prender si volesse la pena di esaminarlo, e maggiormente che in progresso delle trattazioni, allorchè unite anderanno con le resistenze le potenze de' corpi, occorrerà vederne gli esempj.

SCOLIO I.

338. Dalla resistenza costante si procederà a trattare l'ipotesi della variabile, che quella per appunto chia-

chiamasi , la quale mutasi nel proseguimento del moto . Una tal variazione , da più cagioni insieme unite, può ella derivare , come sarebbe , e dalla viscosità , o tenacità del mezzo, ovver fluido, e dalla densità, mutabili ambedue, in diverso luogo di esso . Della prima cagione è per se manifesto , poichè opponendosi un tal glutine al moto del corpo, se questo dove più , e dove meno stia nel fluido aderente , dovrà conseguentemente , e maggiore, e minore, secondo il sito, opporre al corpo resistenza . Ma poichè questa tal tenacità da me num. 317. si assume sempre simile, non sarà altresì riguardata qual cagione della variabilità del resistere, e perciò dalla sola densità del fluido detto questa ripeteremo . Ed in fatti supposto il Mezzo senza tenacità diversa in sito vario, e perfettamente fluido in ogni parte, cioè , che costi di particelle fra loro esattamente pulite , e liscie , la variazione del suo resistere dovrà egli dipendere dall' esser più, o men denso in luoghi diversi. Sicchè adunque per mettere a conto la mutazione , o variabilità del Mezzo, dovrà la densità aver luogo nell'equazione, come una tal qual funzione anche essa della resistenza. E poichè nel fluido uniforme fu notato al num.326. che le celerità stesse eran funzione delle resistenze, se a contrario poi il prefato mezzo sempre simile non esista, quella tal qual funzione di celerità dovrà essere composta con quella cagione , che non lo fa esser simile , cioè con la densità nominata . Per lo che questa appellata $= D$, e le resistenze restando come sopra $= R$, e la m seguendo a far figura d' esponente generico delle velocità, si avrà per Canone, che $R = u^m D$.

SCOLIO II.

339. La denſità in oltre, la quale apporta al fluido la variazione, potrà ſupporſi variare anch' ella in qualunque proporzione delle diſtanze dal punto dato, ovvero centro, e il punto altresì dove il grave cadente ritrovaſi; col porre adunque, la diſtanza fra queſti eguale ad incognita, e ſia verbigrazia $= x$, e che generalmente $= n$ ſia la di lei dignità, e quindi fatto $D = x^n$, ſurrogando queſto nell' antecedente ſiſſato valore, verrà $R = x^n u^m$. Ecco per tanto ſtabilite le eſpreſſioni da valerſene in ogni ipoteſi di mezzi reſiſtenti, quella dello Scolio precedente per quei conſiderati uniformi, e la preſente per i variabili, ambedue riguardando la pura reſiſtenza ſpecialmente, e ſola conſiderata; ci rimane adeſſo da unirle con le potenze de' corpi, tanto coſtanti, che mutabili deſſe pure, le quali a moverſi il corpo nel mezzo elle neceſſitano, il che fare mi riſerberò ne' due ſuſſeguenti Capi, dopo d'aver nel Problema ſeguente ſpiegato il moto, che con la reſiſtenza, per ſe ſola preſa variabile, ha relazione.

PROBLEMA II.

Tav. 6. Fig. 3. *La reſiſtenza variando in una ragione delle diſtanze x a qualunque poteſtà n elevate, e reſiſta pure in proporzione delle velocità coll' eſponente m, ritrovare in ogni punto dello ſcorſo ſpazio le velocità reſidue, ed i tempi impiegati dal mobile diſcendente.*

340. Stando tutto ciò, che all' eſempio primo fu notato, perchè la ſuppoſizione vuole, che come x^n varino le reſiſtenze, ſecondo il già detto dello Scolio antecedente, ſarà $R = x^n u^m$. Conciofiachè poi ſia $R\,dx = u\,du$,

$u\,du$, come al citato esempio apparisce, surrogando perciò, verrà ad aversi pel caso presente $x^n\,dx = u^{1-m}\,du$, e dovendo integrarsi, avremo $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{u^{2-m}}{2-m} + A$. La costante poi, fatta $x = a$, dove è pure $u = c$, risulta $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{c^{2-m}}{2-m}$. Laonde sostituendo, viene $\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} + \frac{c^{2-m}}{2-m} = \frac{u^{2-m}}{2-m}$, rispetto alla quale, le necessarie operazioni facendo, riducesi a questa, $u = \dfrac{\overline{2-m}\times x^{\frac{\overline{n+1}}{2-m}} + \overline{2-m}\times -a^{\frac{\overline{n+1}}{2-m}}}{n+1} + c$.

341. Verrà quindi il tempo $dt = -\frac{dx}{u} = \dfrac{\overline{n+1}\times -dx}{\overline{2-m}\times x^{\frac{\overline{n+1}}{2-m}} + \overline{2-m}\times -a^{\frac{\overline{n+1}}{2-m}} + c}$, dove integrando, ricaveremo il tempo finito fino in B, o in altro punto qualunque.

COROLLARIO I.

342. Fattasi $m = 2$, non ci sarebbe saper nulla del valore delle medesime velocità, e perciò dalla equazione differenziale si dedurrebbe, da cui poi col determinare il valore, che piace alla n, si ricaverebbero i precisi valori. Lascio quì di trattarla, perchè volendo, si è bene altrove osservato il metodo; come pure non si tratteranno le altre ipotesi particolari, per brevità,

Z 2 tanto

tanto col ſuppoſto dell' eſponente n poſitivo, che negativo; riſerbandomi ciò eſeguire all' unione, che delle reſiſtenze con le potenze dovrò fare, ove occorrerà diſteſamente maneggiarle.

COROLLARIO II.

343. Eſſendo la CA aſſunta per lo tempo, e come ſempre $CB = z$ nominata, avrebbeſi adunque, ſtando le ſuppoſizioni del Problema antecedente, $z^n dz = u^{-m} du$, che ſarebbe l' altro caſo delle reſiſtenze nel tempo moltiplicate, dove integrando, fiſſando la coſtante al ſolito, ſi ricaverà $u = \frac{\overline{1-m}\times z^{\frac{n+1}{1-m}} + \overline{1-m}\times -a^{\frac{n+1}{1-m}}}{n+1} + c$, che ſono le celerità. Poichè dato è il tempo, e le velocità, inferirannoſi gli ſpazj ancora dalla regola nota $ds = -udz$, ſurrogandovi le medeſime, e ſaranno eglino $ds = \overline{1-m}\times z^{\frac{n+1}{1-m}} - dz + \overline{1-m}\times a^{\frac{n+1}{1-m}} dz - cdz$.

CAPITOLO II.

Del Moto nel fluido uniforme, riguardate le forze del corpo tanto coſtanti, che variabili.

FArem paſſaggio, dalla reſiſtenza in ſe ſola conſiderata, alle potenze de' corpi nel mezzo moſſi, queſte con quella congiungendo: ed in primo luogo prendendo il fluido coſtante, d' ambedue, cioè delle forze uniformi, e delle variabili, ſi fiſſeranno le leggi nel capo

capo presente. Secondariamente poi quello dissimile supponendo, nel susseguente, ed ultimo di questa Parte, in tutti due l' aspetti egualmente queste tali potenze considerate verranno, per istabilire in tal forma de' movimenti quelle teoriche, che a ciascedun d' essi particolarmente convengono

E S E M P I O I.

344. Dal punto A con le celerità iniziali $=c$ discenda il mobile nel fluido uniforme, per la retta $AC=a$, riguardata primieramente come spazio da scorrersi, nel punto B pervenuto, si nomini $CB=x$, $AB=s$ lo spazio scorso; sicchè, come già fu più volte osservato, sarà $ds=-dx$ l' elementare spazietto. Per questo promosso il grave, la potenza, che l' accelera nominata $=f$, già sappiamo, che viene $-fdx=udu$; ma resistendo il mezzo, e perciò dovendovi aver luogo eziandio $Rdx=udu$, secondo l' espresso al num. 320. dunque dalla forza, e dalla resistenza insieme producesi un moto nel corpo, affetto d' una tal qual velocità, la quale, giunto in B, e chiamata essa $=u$, l' equazione $-fdx+Rdx=udu$ sarà la vera, che la passione di tal' moto n' esprime. O pure riflettendo così, se la forza spinge, e la resistenza impedisce, come è realmente, dovrassi perciò dalla prima sottrar la seconda, per quindi formarsene la completa azione da moltiplicarsi nello spazietto anzidetto $-dx$, acciò se ne abbiano le convenienti celerità; vale a dire ch' avremo $\overline{f-R}\times-dx=udu$, come sopra cioè $fdx-Rdx=-udu$. Allorchè la retta AC vaglia per i tempi, avendosi chiamato $CB=z$, valendosi del raziocinio Tav. 6. Fig. 1.

nio

nio medesimo, e degli altri canoni altre volte stabiliti, avrassi che $fdz - Rdz = -du$.

345. In oltre a tenore del divisato discorso al num. 326. si ha $R = \frac{u^m}{b^{m-1}}$, onde surrogando nella prima espressione, che la legge degli spazj contiene, viene $fdx - \frac{u^m dx}{b^{m-1}} = -udu$; e nella seconda, che riguarda il tempo, $fdz - \frac{u^m dz}{b^{m-1}} = -du$, le quali ambedue stabilite regole saran quelle, che per la discesa, nel supposto uniforme mezzo servirannoci.

COROLLARIO I.

346. Poichè $f - R$ diviene quella tal potenza efficiente del moto, quando sarà $f > R$, la velocità, per lo spazio dove essa s' applica, verrà ad aumentarsi, atteso che maggiore supponesi lo sforzo, che l' ostacolo, e le stabilite poco avanti formule saran desse le proprie ch' a tal caso competono.

COROLLARIO II.

347. E se $f < R$, a contrario dovrà succedere, perchè la potenza diventando della resistenza minore, le celerità scemeranno, e verrebbero le espressioni $-\overline{f+R} \times -dx = udu$, e $-\overline{f+R} \times -dz = du$, o sia $fdx - Rdx = udu$, ed $fdz - Rdz = du$.

CO-

COROLLARIO III.

348. Fatta $f=R$, poſciachè così tanto sforza l' una, quanto l' altra reſiſte, immutabili le velocità reſteranno. Ed in fatti preſa la formula ſtabilita $fdx - Rdx = -udu$, ed integrata, perchè sì la forza, che la reſiſtenza coſtante ſupporremo, haſſi $fx - Rx = -\frac{uu}{2} + A$; o ſia, determinata la A, col ſupporre $x=a$, ed $u=c$, $fx - Rx + Ra - fa - \frac{cc}{2} = -\frac{uu}{2}$; dove applicandovi la preſente ſuppoſizione di $f=R$, riſulta $u=c$, cioè tali ſono le velocità nel punto B, quali in A, principio del moto. Suppongaſi ancora giunto in C il mobile, dove $x=o$, ſempre verrà $u=c$, o vogliam dire, ch' in ogni luogo ſono elle eguali colle iniziali del punto A, cioè ſempre le ſteſſe. Ed ecco un caſo, in cui avrebbeſi il moto equabile, della poſſibilità del quale ne fu ſopra parlato, quando eſaminammo l' analiſi di tal movimento.

COROLLARIO IV.

349. Facendoſi $R=o$, ſi ridurrebbe ad eſſer l' ipoteſi del moto nel vacuo, conforme chiaramente appariſce.

COROLLARIO V.

350. Se la ſopra nominata accelerante forza, ovver totale azione $f-R$, da tendente verſo il punto C, in repulſiva cambiar vogliaſi, dovrannoſi, ſecondo le leggi altrove fiſſate, mutare i ſegni; per lo che in

$-f$

$\overline{-f+R}$ a convertir ſi verrebbe ; e perchè ſalendo, l' elemento dello ſpazio, o del tempo rieſce poſitivo, da quel, che avanti ſi è ſcorto, e dal caſo ſeguente vedraſſi eziandio, e perciò viene una $\overline{-f+R} \times dx = udu$, e l'altra $\overline{-f+R} \times dz = du$; cioè $fdx - Rdx = -udu$, per la prima, ed $fdz - Rdz = -du$, per la ſeconda ; le quali eſpreſſioni ſono le ſteſſe della forza attraente, e perciò ambedue l' ipoteſi di centrale, e repulſiva in una ſola formula ſi comprendono, s' intenda ſempre però col reſtare la praticata coſtruzione.

SECONDO CASO DELLA SALITA.

Tav. 6. Fig. 4. 351. Le denominazioni reſtino fiſſe quelle del num. 323., come nelle ſemplici reſiſtenze ; e ſiccome ivi fu ſtabilito, così quì pur milita egualmente che $-R \times dx = udu$. Ma perchè la forza del corpo aſcendente lo ritarda anch'eſſa, dunque ſarà $\overline{-f-R} \times dx = udu$, cioè $fdx + Rdx = -udu$. E ſe BC ſarà aſſunta per lo tempo, $fdz + Rdz = -du$ viene parimente l' altra eſpreſſione : quindi in luogo della reſiſtenza ſurrogando quivi pure la ſua funzione delle celerità, come ſi è fatto poco anzi, abbiamo per la prima $fdx + \frac{u^m dx}{b^{m-1}} = -udu$, e per la ſeconda $fdz + \frac{u^m dz}{b^{m-1}} = -du$; le quali equazioni in nient' altro da quelle della diſceſa differiſcono, che nel ſegno poſitivo alle reſiſtenze propoſto.

SCO-

S C O L I O I.

352. Per aver l' idee nette, e chiare d' ogni ſpezie, e natura di moto, non ſarà fuor di propoſito l' avvertire, che della ſalita trattandoſi, benchè ſuppongaſi, che il grave aſcendendo ſi ritardi, non è però, che ſimile il movimento ſia a quello della ſceſa, onde dir ſi poſſa ch' il primo accelerato, ed il ſecondo ritardato egli ſia, avendo eſſi ben diverſa natura, e che quella perciò non è avvertita al num. 104. la quale ſimili ambedue li caratterizzava. Diſſimili pertanto ſaranno, perchè l' indole delle forze non è in un caſo contraria ne' ſegni dell' altro, mentre diſcendendo la forza l' accelera, e la reſiſtenza lo ritarda, e ſalendo tutte due lo ritardano, conforme abbiamo ſuppoſto; e perciò a bella poſta mi ſervirò, chiamando il primo, del nome di moto nella diſceſa, e quando occorrerà del ſecondo parlare, col nome di moto della ſalita verrò a nominarlo.

S C O L I O II.

353. Da' due fiſſati Canoni del moto nella diſceſa, e nella ſalita nel fluido uniforme, colle relazioni della potenza congiunte, ne naſceranno le ſoluzioni de' Problemi tutti, ch' in appreſſo farem per trattare in queſta Parte ſeconda. Seguendo pertanto la ſuppoſizione del predetto fluido come poco fa ricordato, e le potenze del corpo egualmente coſtanti, con le varie ipoteſi delle reſiſtenze alle velocità proporzionali, ſi ſcioglieranno adeſſo diverſe quiſtioni nella forma, che ſegue.

P R O B L E M A I.

Diſcenda un corpo di forza coſtante affetto nel mezzo uniforme, ſtando le reſiſtenze al quadrato della velocità proporzionali, ritrovar le velocità, ed i tempi in qual- Tav. 6. fig. 1.

 ſivo-

ſivoglia punto del trapaſſato ſpazio.

354. Dall' antecedente Eſempio della diſceſa ſta fiſſo, che nello ſpazio applicata la forza, venga la formula $f\,dx - \frac{u^m\,dx}{b^{m-1}} = -\,u\,du$; eſſendochè poi ſi voglia per condizion del preſente Problema, che ſia $m = 2$, ed $f = 1$, ricavaſi perciò $-\,dx = \frac{b\,u\,du}{b - uu} = \frac{\frac{1}{2}b\,du}{b^{\frac{1}{2}} - u} - \frac{\frac{1}{2}b\,du}{b^{\frac{1}{2}} + u}$, diviſa tale equazione in due equivalenti parti. Integrando poi, haſſi $A - x = -\frac{1}{2}b\,l\,\overline{b^{\frac{1}{2}} - u} - \frac{1}{2}b\,l\,\overline{b^{\frac{1}{2}} + u} = -\frac{1}{2}b\,l\,\overline{b - uu}$; e quindi fatta $x = a$, ed $u = c$, ch' è la velocità data nel principio del movimento, produceſi $A = a - \frac{1}{2}b\,l\,\overline{b - cc}$, per lo che finalmente ſoſtituendo, eccone il riſultato, $\frac{2a - 2x}{b} = l\,\overline{\frac{b - cc}{b - uu}}$; e fattoſi $lq = 1$, logaritmo dell' iperbola, verrà di poi, facendo quanto deveſi, $q^{\frac{2a - 2x}{b}} = \frac{b - cc}{b - uu}$, cioè $uu = \overline{cc - b} \times q^{\frac{2x - 2a}{b}} + b$, che ſono le velocità cercate.

355. Conciofiachè ſtia ſempre $-\,dx = u\,dt$, ſe quivi pongaſi il preciſo valor di $-\,dx$, ch' al precedente numero dato vienci, ne riſulta $dt = \frac{b\,du}{b - uu}$, dove parimente dividendola in due, ne viene $dt = \frac{b\,du}{b - uu} =$

$\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}du}{b^{\frac{1}{2}}+u} + \frac{\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}du}{b^{\frac{1}{2}}-u}$, per lo che integrando, $A + t = \frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}\, l\,\overline{b^{\frac{1}{2}}+u} - \frac{1}{2}\, l\,\overline{b^{\frac{1}{2}}-u}$, e fatto il tempo $t=o$, quando $c=u$, risulterà $A = \frac{1}{2}b\, l\frac{b^{\frac{1}{2}}+c}{b^{\frac{1}{2}}-c}$, e però col surrogare questo determinato valore, $t = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{2}\, l\frac{\overline{b^{\frac{1}{2}}+u}\times\overline{b^{\frac{1}{2}}-c}}{\overline{b^{\frac{1}{2}}-u}\times\overline{b^{\frac{1}{2}}+c}}$, e s' in vece delle celerità le poco fa ritrovate sostituiscansi, riescirà finalmente

$$t = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{2}\, l\frac{\overline{b^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\overline{cc-b}\times q^{\frac{2x-2a}{b}} + b}}\times\overline{b^{\frac{1}{2}}-c}}{\overline{b^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\overline{cc-b}\times q^{\frac{2x-2a}{b}} + b}}\times\overline{b^{\frac{1}{2}}+c}},$$

per espressione del tempo cercato.

COROLLARIO I.

356. Facciasi ch' il moto dalla quiete abbia il principio, che tanto vuol dire, che l'esser $c=o$, l' equazione della sopraccennata celerità viene $a-x = \frac{1}{2}b\, l\frac{b}{b-uu}$, o sia, applicando il supposto a quella ridotta a' logaritmi, $uu = -b\times q^{\frac{2x-2a}{b}} + b$; siccome il tempo precedente

avrassi così $t = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{2}\, l\, \frac{b^{\frac{1}{2}} + \sqrt{b - bq^{\frac{2x-2a}{b}}}}{b^{\frac{1}{2}} - \sqrt{b - bq^{\frac{2x-2a}{b}}}}$.

COROLLARIO II.

357. Diventando $x = a$, cioè fingendosi il corpo esistere nel punto A, principio del moto, le nominate innanzi velocità del num. 354. riescono $uu = \overline{cc - b} \times q^{\frac{o}{b}} + b$, vale a dire $u = c$; che è per appunto quello, che effettivamente avvenir dee, mentre tale è la supposizione. Il tempo altrimenti nulla dovrà divenire, avvegnachè il moto non abbia egli per anche dato principio. Laonde ripigliando la sua equazione num. 355. la prefata supposizione restando, diviene $t =$

$$\frac{1}{2} b^{\frac{1}{2}}\, l\, \frac{b^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\overline{cc - b} \times q^{\frac{o}{b}} + b} \times \overline{b^{\frac{1}{2}} - c}}{b^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\overline{cc - b} \times q^{\frac{o}{b}} + b} \times \overline{b^{\frac{1}{2}} + c}} = \frac{1}{2} b^{\frac{1}{2}}\, l\, \overline{b - cc}$$

$- \frac{1}{2} b^{\frac{1}{2}}\, l\, \overline{b - cc} = o$, cioè di niun valore, come si è detto.

COROLLARIO III.

358. Pervenuto il grave nel centro C, viene $x = o$, sicchè le velocità solite sono $uu = \overline{cc - b} \times q^{\frac{-2a}{b}} + b$, e collo stesso metodo avrannosi ivi i tempi egualmente.

CO-

COROLLARIO IV.

359. Se suppor vogliasi la quantità $b = \infty$, e ricavar si debba la natura del moto con tal dato, riassumendo l' equazione del presente supposto nel Problema, e sostituendo tal valore, si ha $f\,dx - \frac{uudx}{\infty} = - udu$, o sia $f\,dx = - udu$, vale a dire l' ipotesi del moto nel voto, cioè le resistenze zero.

PROBLEMA II.

Il mobile ascenda nel prefato mezzo resistente uniforme, che resista come sopra in ragion de' quadrati delle velocità, e la forza costante, si vogliono le celerità, ed i tempi Tav. 6. Fig. 4.

360. Perchè $CA = a$, e $CB = x$ compete all' ipotesi della salita del grave, prendendosi perciò la propria formula del caso delle potenze nello spazio, quale è num. 351. $dx + \frac{uudx}{b} = - udu$, coll' includervi anche le predette condizioni d' $f = 1$, ed $m = 2$, riducesi in $dx = - \frac{budu}{b + uu}$; laonde coll' integrare poi, perchè il numeratore si è la metà del differenziale del denominatore, verrà $A + x = - \frac{1}{2} b l \overline{b + uu}$; sicchè la costante, col porre $x = a$, perchè viene $c = u$, sarà $A = - a - \frac{1}{2} b l \overline{b + cc}$, e perciò $x - a = \frac{1}{2} b l \frac{b + cc}{b + uu}$,

cioè

cioè $\frac{2x - 2a}{b} = l\,\overline{\frac{b + cc}{b + uu}}$; e col logaritmo iperbolico, come poco innanzi si è fatto, si riduce così $q^{\frac{2x - 2a}{b}} = \frac{b + cc}{b + uu}$, cioè $uu = \overline{b + cc} \times q^{\frac{2a - 2x}{b}} - b$, qual sarà l'espressione delle velocità.

Tav. 6. Fig. 5. 361. Vi rimane da trovarsi il tempo, il quale si ottiene dalla equazione nel num. antecedente fissata $dx = -\frac{budu}{b + uu}$, perchè essendo al proposito $dx = udt$, perciò surrogando, si ha $dt = -\frac{bdu}{b + uu}$, equazione dipendente dalla quadratura del cerchio, esprimendosi questa per un arco circolare per la tangente ritrovato, come apparirà dalla seguente costruzione. Onde facciasi $AB = u =$ tangente nel quadrante ACO., descritto col raggio $= b^{\frac{1}{2}}$; condotta in oltre la CB, ed a questa l' altra infinitamente vicina Cb, e fatto centro C, descrivasi poi l' archetto minimo Bn; per la somiglianza de' settori CBn, CPp, si avrà, che sta $Pp : Bn :: CP = CA : CB$; similmente da' triangoli simili Bnb, CAB : sta $Bn : Bb :: CA : CB$; quindi componendo queste ragioni, avrassi che $Pp \times Bn : Bb \times Bn :: CA \times CA : CB \times CB$, cioè $Pp : Bb : \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$, e ponendovi i termini analitici, $Pp : du :: b : b + uu$, i quali ad equazione ridotti, producon finalmente che $Pp = \frac{bdu}{b + uu}$, espressione del tempo cercato, come vede-

vedesi, quindi $\frac{b\,du}{b+uu} = Pp = -dt$: e perchè AP si è l'integrale, o arco finito di Pp, integrando dunque avremo $-t+A=AP$; la data A, quale indica l' arco da aggiugnersi, o sottrarsi costante, secondo le leggi note, si determina riflettendo, che nel principio del moto dove $t=o$, le velecità iniziali sono maggiori, perchè la resistenza sempre più poi di mano, in mano le diminuisce; e perciò sieno $=AT=c=u$, e l' arco AP diventa in tal caso $=AS$; onde $-t=AP-AS$, o sia $t=AS-AP$; ma $AS-AP=SP$, conforme dall' ispezione della figura è manifesto, e perciò $t=SP$, cioè SP è proporzionale al tempo, che vuolsi.

COROLLARIO I.

362. Giunto salendo il mobile fino in Q, ed ivi estinta pongasi la velocità, cioè $u=o$; dall' equazione delle medesime sopra al problema già stabilita, ne risulta $x = \frac{1}{2} b\, l \frac{b+cc}{b} + a = AQ + AC$.

COROLLARIO II.

363. Pervenga il corpo ad una distanza infinita, e sia perciò $x=\infty$, allora si ricava dalle già sopra ricordate celerità $b+uu = \frac{b+cc}{q^{\frac{2x-2a}{b}}}$, che $uu=-b$.

CO-

COROLLARIO III.

364. Siccome ſopra al num. 356. nella ſuppoſta ipoteſi della ſceſa del corpo dalla quiete, ſi ritrovò eſſere $a - x = \frac{1}{2} b \, l \frac{b}{b - uu} = AB$, come altresì nel corollario avanti al precedente, nella ſalita da A fino in Q viene $x - a = \frac{1}{2} b \, l \frac{b + cc}{b} = AQ$; ſe ſtabiliſcaſi, che lo ſpazio fino in B dello ſcendere ſia eguale a quello fino in Q del ſalire, cioè $a - x = AB = x - a = AQ$, ſarà egualmente $\frac{1}{2} b \, l \frac{b}{b - uu} = \frac{1}{2} b \, l \frac{b + cc}{b}$, vale a dire $\frac{b}{b - uu} = \frac{b + cc}{b}$, dove facendo le neceſſarie operazioni, riſultano le velocità fino in B della ſceſa $uu = \frac{bcc}{b + cc}$, ſicchè date vengono per quantità note, mentre eſpreſſe ſono per la velocità iniziale del ſalire, e dalla cognita aſſunta b.

SCOLIO.

365. Per rapporto al moto nel vacuo ſi è notato altrove, che l'accelerato ſcendendo è ſimile, e della natura ſteſſa del ritardato ſalendo, perchè ſcorre lo ſpazio ſteſſo, ed ha nel principio della ſalita quella velocità, che ivi ſcendendo aveva acquiſtata. Dal Corollario precedente ſi è fatto manifeſto, che lo ſpazio ſteſſo, tanto ſalendo, che ſcendendo trapaſſa, ma che la velocità,

cità, di cui è affetto nello ſcendere ſi è ben diverſa, poſciachè nel primo caſo ella è $u = \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{b+cc}}$, e quella del ſecondo $u=c$, cioè diſſimile ne' due ſuppoſti; e perciò ſi potrà legittimamente inferire, che i due moti nel mezzo reſiſtente, per iſpazio eguale eſeguiti, tanto fra loro diſſimili poſſon chiamarſi relativamente alle velocità, quanto l' una di queſti dall' altra è diſuguale.

COROLLARIO I.

366. Riſpetto a' tempi impiegati parimente, giacchè nella diretta degli ſpazj, e reciproca delle celerità ſtanno fra loro, ſecondo le già ſtabilite teoriche, ne verrà, che eguali gli ſpazi, e diſguali le già dette velocità, reſteran queſti nella inverſa ragione di eſſe, e per conſeguenza ineguali eziandio; e perciò in quanto a' medeſimi ſono egli pure i due predetti moti diſſimili; onde concorda ciò, con quel tanto, che avvertito fu al num. 352. notando la loro diverſa natura.

PROBLEMA III.

Reſtando le ſuppoſizioni dell' antecedenti Problemi delle reſiſtenze nel mezzo uniforme al quadrato delle velocità proporzionali, e forza coſtante, ma che la diſtanza preſa ſia per lo tempo, ritrovare, e velocità, e ſpazio ſcorſo.

367. Prendendo adunque la formula, ch' a queſto caſo compete, e tanto la diſceſa, che la ſalita abbracciando in una ſola eſpreſſione, ſecondo l' enunciato al

num. 345. per una, e per l' altra num. 351. verrà $f dz \mp \frac{u^m dz}{b^{m-1}} = - du$, ed includendo le condizioni del Problema, cioè $m = 2$, ed $f = 1$, si ha $- dz = \frac{b du}{b \mp uu}$. Se la discesa vogliasi trattare, quale inclusa viene nel segno negativo alle finite velocità proposto, la maniera d' integrar l' equazione si è scorta al num. 354., e se la salita parimente, quale è l' altro caso, diverrà. l' equazione espressa per arco circolare, a norma del num. 361., le quali per essersi a' predetti citati luoghi maneggiate nelle circostanze, che da' presi spazj le velocità si volevano, ommetterò per brevità riassumerle in questi, ove da' tempi assegnati egualmente le medesime si cercano. Trovate pertanto in qualunque forma, sostituendole nella formula $ds = \mp udz$, avrannosi gli spazi proposti da ritrovare.

SCOLIO.

368. La sopra esposta ipotesi delle resistenze al quadrato delle celerità proporzionali, si vuole quasi per general consentimento, che ei sia la vera, che nel fluido, ove il corpo di potenza costante affetto se ne scorre, abbia luogo; siccome però alcuni hanno trattata più estesa tal materia, applicandovi altri casi, e particolarmente quello delle prefate resistenze alle semplici velocità proporzionali, ipotesi creduta in qualche tempo la vera ch' avesse luogo in Natura, così perciò nel seguente Problema sarà da me parimente trattato.

PRO-

P R O B L E M A IV.

Essendo il mezzo resistente uniforme in proporzione delle semplici velocità, e la potenza del corpo, che scende, costante, ritrovare le solite relazioni delle velocità, e tempi in qualunque punto dello scorso spazio. Tav. 6. Fig. 1.

369. Dunque perchè $m = 1$, la formula generale precedentemente num. 354. fissata, verrà $f\,dx - u\,dx = -u\,du$; cioè perchè anche $f = 1$, $-dx = \frac{u\,du}{1-u}$; separata in due parti l' equazione, che equivalgano alla stessa, viene $-dx = -du + \frac{du}{1-u}$, ed integrando, si ha $A - x = -u - l\overline{1-u}$, essendo la sottotangente del termine, ch' esprime una Logistica $= 1$. Facciasi $x = a$, onde sia $u = c$, ed avrassi $A = a - c - l\overline{1-c}$, il qual valore sostituito, se ne ricava $a - x = l\overline{\frac{1-c}{1-u}} - u + c$, dalla cui espressione risultano le velocità prese a trovare.

370. Avvegnachè poi ci presenti l' equazione differenziale antecedente $-dx = \frac{u\,du}{1-u}$, ed altresì poi dal canone de' tempi noto nello scendere ricavandosi $dt = \frac{-dx}{u}$; surrogandovi, viene $dt = \frac{du}{1-u}$, equazion che varrà per ritrovarsi il tempo, la quale integrandola, ci porge $t + A = -l\overline{1-u}$, e determinata la costante, come sopra quando $t = o$, che viene $u = c$, si ha in

 fine

fine $t = l\overline{\frac{1-c}{1-u}}$, dove surrogando la già trovata antecedente celerità, ci risulterà espresso il tempo predetto, e per le celerità iniziali, e per gli assunti spazj.

COROLLARIO I.

371. Vogliasi, che dalla quiete scenda il corpo; sicchè sia $c = o$, le prime vengono $a - x = -u + l\frac{1}{1-u}$, ed il secondo $t = l\frac{1}{1-u}$.

COROLLARIO II.

372. Nel principiare il movimento, che nel punto A succede, dove $x = a$, le già sopra notate celerità num. 369. divengono $u + l\overline{1-u} = c + l\,\overline{1-c}$, cioè all' espressione delle iniziali equivarrebbero le medesime nel punto detto, come in fatti talmente così deve essere.

COROLLARIO III.

373. Stando l' accennata supposizione, ma dalla quiete scenda il grave cadente, perchè è parimente $c = o$, il valore delle stesse sarà altresì $= o$, dovendo così avvenire, perchè ivi sta in quiete il corpo.

COROLLARIO IV.

374. Se faremo, che sia la $x = o$, cioè che già arrivato nel punto C pongasi il grave, diverrà la velocità al di sopra accennata, $u + l\,\overline{1-u} = c + l\,\overline{1-c} - a$, espres-

espressa per quantità costanti, la quale ci somministrerà egualmente al solito i trapassati tempi, per l'intiero spazio AC.

PROBLEMA V.

Di forza costante dotato se ne salga adesso il corpo nel fluido uniforme, che in proporzione delle semplici velocità resista, si vogliono le velocità, ed i tempi parimente in ogni punto di scorso spazio. Tav. 6. Fig. 4.

375. Coll' assegnare adunque nell' espressione $f\,dx + \frac{u^m\,dx}{b^{m-1}} = -u\,du$, determinata pel caso presente, $m=1$, ed $f=1$, se ne ricava $dx = -\frac{u\,du}{1+u} = -du + \frac{du}{1+u}$, così che passando ad integrare, viene $A+x = -u + l\,\overline{1-u}$; e la costante già solita, considerando che quando $x=a$, è pure $u=c$, risulta $A = -a-c+l\,\overline{1+c}$, per lo che col surrogarla, ne abbiamo $x-a = -u+c+l\,\overline{\frac{1-u}{1+c}}$, equazione esprimente quelle velocità, che si cercano.

376. Posto poi il valore di $dx = \frac{-u\,du}{1+u}$ nella legge fissata, ch' a questo caso di salita conviene, quale è $dx = u\,dt$, sarà $dt = \frac{-du}{1+u}$, espressione, che ci somministra il tempo; dunque integrando, hassi $t+A = -l\,\overline{1+u}$, e perchè $t=o$ si è quando $u=c$, e perciò

ciò $A = - l\, 1 + c$, laonde farà $t = l \frac{1+c}{1+u}$.

COROLLARIO I.

377. Vogliasi che colla velocità iniziale data, fino al punto $\mathcal{Q}$ salito sia il corpo, dove $u = o$ divenga, si ritroverà dal primo quesito delle celerità, $x - a = c + l \frac{1}{1+c} = A\mathcal{Q}$, ed il tempo impiegatovi altresì $t = l \frac{1+c}{1}$.

PROBLEMA VI.

Tav. 6. Fig. 1. e 4. *Per la retta, ove scorre il grave assunta per i tempi sia applicata la potenza costante nel fluido uniforme, che resista nelle semplici velocità come sopra, trovare la velocità, e spazio trapassato in un punto qualunque.*

378. Si sa adunque, ch'in ambedue i supposti di scesa, e salita unitamente prendendo, poichè si chiama $AC = a$, e $CB = z$, viene $f dz \mp \frac{u^m dz}{b^{m-1}} = - du$, e perchè vuolsi $m = 1$, ed $f = 1$, ridurrassi in $- dz = \frac{du}{b \mp u}$; col maneggiare l' un de' casi s' indica la maniera per l' altro, e perciò assumendo il segno meno, quale ha luogo per la discesa, e integrando poi con le solite regole per stabilir la costante, si ha $a - z = l \frac{1-c}{1-u}$;

ed

ed a' logaritmi riducendo, $q^{a-z} = \frac{1-c}{1-u}$, o pure $u =$ $\overline{c-1} \times q^{z-a} + 1$, quale è la celerità cercata.

379. La legge, che sta $-u\,dz = ds$, produrrà, col sostituire la medesima ritrovata velocità, $ds = -dz \times \overline{c-1} \times q^{z-a} + 1$, da dove coll' integrare possonsi avere gli spazj cercati.

COROLLARIO I.

380. Quando dalla quiete se ne discenderà il mobile, perchè $c = o$, è altresì $u = -q^{z-a} + 1$, e gli spazj $ds = -dz \times \overline{-q^{z-a} + 1}$.

COROLLARIO II.

381. Stando la medesima supposizione di partir dalla quiete, ma che nel punto A esista il grave, cioè $z = a$, sarebbe allora $u = -1 + 1 = o$, siccome gli spazi egualmente $ds = -dz + dz = o$, ciò, ch' in fatti succeder deve, perche se nel citato punto il tempo vien zero, eguale a zero parimente esser deve, e velocità, e spazio, avvegnachè senza trapassar tempo, come l' una, tanto che l' altro non possono aver luogo in natura.

COROLLARIO III.

382. Allorchè poi giunto sia nel punto C, perchè ivi viene $z = o$, sarebbe $u = \overline{c-1} \times q^{-a} + 1$; e se pur

pur vogliasi, che sia $c = o$, vale a dire, ch' il partir suo succeda dalla quiete, $u = \frac{-1 + q^a}{q^a}$ avremo in tal caso.

SCOLIO.

383. Avendo considerate ne' fluidi uniformi le potenze de' gravi mossi sempre costanti, in quelle ipotesi di resistenze, che propriamente alla natura, ed indole d' un tal moto convengono, richiede adesso l' ordine che ne' medesimi si esaminino quelle teoriche provenienti dal mobile, il quale le potenze sue abbia secondo una tal qual ragione della distanza dal centro mutabili in diverso luogo, per rapporto al loro valore, seguendo quivi anch' il metodo, che nella parte prima si è ritenuto.

PROBLEMA GENERALE.

Tav. 6. Fig. 1. 4. *Resista il mezzo uniforme proporzionalmente ad una potestà m delle velocità; la potenza del grave poi varj in un punto qualunque in ragione delle distanze dal punto dato, all' esponente n elevate, ritrovare ogni affezione del mobile.*

384. Ogni denominata linea, e raziocinio sta pure al caso presente, come stabilito si è sopra, e tanto la discesa, che la salita nella espressione $f\,dx \mp \frac{u^m\,dx}{b^{m-1}} = -u\,du$, riguardando l' AB per lo spazio, comprendesi. Quì poi perchè supposto giunto in B il mobile, si vuole, che la potenza sua sia variabile a norma della distanza $CB = x$ alla dignità n innalzata,

appel-

appellata dunque $f = ax^n$, e dipoi surrogata, hassi $ax^n dx \mp \frac{u^m dx}{b^{m-1}} = -udu$ per la giusta legge ch' il Problema richiede; e passando ad integrare, $x = \int \frac{-b^{m-1} udu}{b^{m-1} ax^n \mp u^m}$, dove saran date per la x le velocità.

385. Il tempo solito da ritrovarsi, assumendo ambedue i casi, parimente nella nota espressione $dx = \mp udt$, e surrogandovi il valore di dx poco sopra fissato, ne verrà $\mp dt = \frac{-b^{m-1} du}{b^{m-1} ax^n \mp u^m}$, dalla cui formula ricavar potrassi il medesimo, qualora fissate saranno ne' casi particolari le velocità, e quivi il di loro specicifico valore sostituito.

Restando cosa facile il raziocinio anzi detto applicarlo allorchè venga presa l' altra formula delle forze moltiplicate nella retta AB, come tempo, si ommette perciò l' esemplificare.

COROLLARIO I.

386. Col supporre $b^{m-1} = \infty$, si avrebbe ridotta l' equazione al caso del moto nel vacuo, posciachè verrebbe $ax^n dx = -udu$.

ESEMPIO I.

387. Supponiamo adunque, che le forze stieno in ragion diretta delle distanze, cioè $n = 1$, e che la resistenza in proporzion delle semplici velocità resista, onde $m = 1$ parimente abbiasi, trattandosi l'equazione nel Pro-

blema già avanti posto, stabilita, si ha $axdx \mp udx = -udu$. Questa poichè ella racchiude la proprietà d' avere la somma degli esponenti dell' incognite eguale, ci darà luogo alla separazione delle indeterminate, e perciò in qualche maniera da construirsi; per lo che presa in caso della scesa, giacchè l' altro pure col metodo stesso si può trattare, e fatto che sia $u = \frac{xy}{2}$, e perciò $4uu = xxyy$, come pure $udu = \frac{yyxdx + xxydy}{4}$, surrogando, ne verrà $4adx - 2ydx + yydx = -xydy$, o sia $-\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{4a - 2y + yy} = \frac{ydy - dy}{4a - 2y + yy} + \frac{dy}{4a - 2y + yy}$ divisa questa parte d' eguaglianza in due, per potere in qualche forma integrare, il che s' eseguisce relativamente al termine $\frac{ydy - dy}{4a - 2y + yy}$; facendo $4a - 2y + yy = zz$, e perciò $ydy - dy = zdz$, e così $\int \frac{ydy - dy}{4a - 2y + yy} = lz = l\overline{4a - 2y + yy}^{\frac{1}{2}}$; e ripigliando l'equazione, e restituendo in luogo di y il valor suo $\frac{2u}{x}$, ed integrando parimente, avremo $A - lx = l\sqrt{4axx - 4ux + 4uu} - l\sqrt{xx} + \int \frac{dy}{4a - 2y + yy}$, e quindi $A = l\sqrt{4axx - 4ux + 4uu} + \int \frac{dy}{4a - 2y + yy}$; la qual costante determinerassi dopo che costruito avremo

mo il termine $\int \frac{dy}{4a - 2y + yy}$ nella forma ſeguente.

Deſcrivaſi il quadrante ABC col raggio $= 1$, ed abbiaſi Tav. 6. Fig. 6. in A per ſua tangente $AT = \frac{y - 1}{\sqrt{4a - 1}} = \frac{2u - x}{x\sqrt{4a - 1}}$, atteſo il valore di $y = \frac{2u}{x}$; ſarà per conſeguenza la ſegante $CT = \sqrt{\frac{yy - 2y + 1}{4a - 1} + 1} = \frac{\sqrt{yy - 2y + 4a}}{\sqrt{4a - 1}}$; dipoi tirata l'infinitamente vicina CS, e centro in C, deſcritto l'archetto minimo TL, l'Algebra ci inſegna, che ſta $Pp : TS :: \overline{CA}^2 : \overline{CT}^2$, e mettendo i termini analitici, $Pp : \frac{dy}{\sqrt{4a - 1}} :: 1 : \frac{yy - 2y + 4a}{4a - 1}$; per lo che $Pp \times \frac{1}{\sqrt{4a - 1}} = \frac{dy}{4a - 2y + yy}$, è l'arco finito $AP \times \frac{1}{\sqrt{4a - 1}} = \int \frac{dy}{4a - 2y + yy}$. Dunque la ſopra eſpoſta coſtante viene $A = l\sqrt{4axx - 4ux + 4uu} + \frac{AP}{\sqrt{4a - 1}}$; ſicchè facendoſi $x = a$, ed $u = c$ nel principio del moto, dove l'arco AP diventar deve parimente APB, avremo $A = l\,\overline{4a^3 - 4ac + 4cc}^{\frac{1}{2}} + \frac{APB}{\sqrt{4a - 1}}$, e perciò ſoſtituendo tal determinato valore nella già ſtabilita equazione, viene $l\,\overline{4a^3 - 4ac + 4cc}^{\frac{1}{2}}$

$+ \frac{APB}{\sqrt{4a-1}} = l\,\overline{4axx - 4ux \pm 4uu}^{\frac{1}{2}} + \frac{AP}{\sqrt{4a-1}}$; che riducendo i termini, ſi ha finalmente $\frac{APB - AP}{\sqrt{4a-1}} = \frac{BP}{\sqrt{4a-1}} = l\,\overline{\frac{axx - ux + uu}{a^3 - ac + cc}}^{\frac{1}{2}}$, equazione da coſtruirſi per le quadrature, da cui aver ſi potranno le celerità cercate, e quindi i tempi, ſecondo le teoriche ſtabilite, e praticate.

S C O L I O.

388. Altre ragioni potrebbero aſſegnarſi tanto all' eſponente n delle forze, che alla dignità m delle velocità, ma poichè l' equazioni non ſarebbero ridotte a condizioni di poterſi in eſſe ſeparare le indeterminate, e perciò nè coll' Algebra da integrarſi, e neppure a quadrature riducibili, paſſerò avanti, trattando in queſta ipoteſi di forza variabile, i Problemi inverſi eziandio, come nel vacuo ſi è praticato; e dalle date velocità, e reſiſtenze in qualche ragione delle medeſime, per ritrovarſi, e forze, e tempi darò cominciamento.

P R O B L E M A G E N E R A L E.

Tav. 6. Fig. 1. e 4. *Date le velocità, e le reſiſtenze in qualche proporzione di eſſe, ritrovare nel mezzo reſiſtente uniforme la potenza, o forza del corpo, e le altre affezioni ſolite de' tempi ſcorſi, o degli ſpazj.*

389. Dalle eſpreſſioni ſtabilite più volte per ambedue i caſi della ſceſa, e ſalita del mobile per gli ſpazj

ſpazj $f\,dx \mp \frac{u^m\,dx}{b^{m-1}} = -u\,du$, e parimente d' allorchè la retta da trapaſſarſi per lo tempo s' aſſume $f\,dz \mp \frac{u^m\,dz}{b^{m-1}} = -du$, verranno ſciolte le particolari quiſtioni, delle forze, che ſi propongon di trovare, poſciachè riſulteranno dalle date velocità, e dallo ſpeciale aſſunto, che prendeſi di tempo, o di ſpazjo aſſegnato. I tempi poi, o pure gli ſpazj dalle regole fiſſate, e per diſceſa, e ſalita $\mp \frac{dx}{u} = dt$, e $\mp u\,dz = ds$ verrannoci dati, col ſoſtituire le già preſe per note celerità, come tutto ſi farà manifeſto dagli eſempj ſeguenti.

E S E M P I O I.

390. Le velocità poſte proporzionali alla ſudduplicata degli ſcorſi ſpazj, cioè così $uu = 2a - 2x$, quale è la ragione ſteſſa, che ritener si vide nel vacuo, ed $m = 1$, cioè le reſiſtenze a queſta ſemplicemente preſa avendo ragione, conſiderandoſi la ſceſa, ne viene $f = u - \frac{u\,du}{dx}$; e differenziando la velocità aſſunta, ed in luogo di $u\,du$, e dell' u, ſoſtituendo, ſe ne ha $f = \sqrt{2a - 2x} + 1$, per la forza cercata. I tempi non varieranno punto da quelli in queſta ipoteſi medeſima ritrovati al num. 214. nel vacuo, poichè ſempre è vero, che ſia $-\frac{dx}{u} = dt$, eziandio nel mezzo reſiſtente, e perchè le velocità da ſoſtituirſi $u = \sqrt{2a - 2x}$ ſono ſimil-

milmente le ſteſſe, che ivi dedotte furono.

COROLLARIO I.

391. Se pongaſi che $x=a$, che ciò viene a dire la ſituazion del mobile fiſſarſi nel punto A, diverrà la ſopra eſpoſta forza $f=1$, cioè a coſtante riſulta eguale.

ESEMPIO II.

392. Le reſiſtenze reſtando nella ragione antecedente, ma le velocità date ſiano come gli ſcorſi ſpazj fino in B, cioè $u=a-x$, e quadrando $uu=aa-2ax+xx$, differenziando poi ſarà $udu=-adx+xdx$; per lo che col ſoſtituire come ſopra, e l' une, e l'altre, haſſi $f=a-x+a-x=2a-2x$; e quì col ſupporre il corpo in A, dove $x=a$, verrà anche $f=o$. Laonde in A non avrebbeſi forza, e per conſeguenza non potrebbeſi principiar moto alcuno, per lo che impoſſibile queſto tal moto, quando che ammetter non vogliaſi, che qualche data velocità abbia ivi il corpo, che capace ella ſia di condurlo al movimento, ſuperando l'oſtacolo della reſiſtenza, ch' al medeſimo opponeſi.

COROLLARIO I.

393. In ambedue i prefati eſempj col ſupporre, che il moto facciaſi nel voto, vale a dire le reſiſtenze $=o$, cioè $\sqrt{2a-2x}=u=o$, relativamente al primo, e $2a-2x=u=o$ rapporto al ſecondo, viene in ciaſchedun d'eſſi $a=x$; Sicchè la ſuppoſizione del num. 390., e quel-

e quella dell' esempio antecedente di fissarsi il corpo in A, punto del principio del moto, poichè lo stesso ci somministra, racchiude in se ch' il movimento nel vacuo venga fatto: quindi ne viene che giustamente nel fatto primo ne risulta la forza costante, come tale risultò l' ipotesi delle velocità predette, più volte notata nella parte prima. Il secondo poi ci fa vedere il moto impossibile, quel, ch' in realtà al num. 263. venne esservato parimente quando tali le celerità predette per date s' assunsero. Ed in fatti le posizioni stesse delle velocità prese comprendono necessariamente, ch' il moto nel suo principio considerato venga come nel vacuo, poichè siccome sono le medesime celerità una funzione delle resistenze, e di più elle prendendosi date in ragione degli spazj scorsi direttamente, e questi poi avvegnacchè in A sieno $= o$, nulla anche parimente saranno ivi le resistenze.

E S E M P I O III.

394. Per l' equazione dell' ordinata alla parabola Apolloniana $tx = uu$ date ci vengano le velocità, e le resistenze al quadrato delle medesime abbiamo la loro proporzione, onde col prendere la scesa divenga $f = \frac{uu}{b} - \frac{udu}{dx}$; sostituendovele, si avrà $f = \frac{2tx - bt}{2b}$ per l' espressione delle ricercate forze.

S C O L I O.

395. E' superfluo il portare altri esempj, come altresì il caso secondo della formula delle forze nel tempo, mentre per se resta facilissimo, e poco di novità ci

ci iſtruirebbe quando maneggiar ſi voleſſe; onde è, che brevemente farem vedere il metodo, e la maniera con cui l' altro converſo Problema trattar deveſi: cioè dati i tempi, ritrovare, e forze, e velocità, conforme nella Parte prima abbiam praticato.

ESEPIO IV.

396. Il tempo, che per dato prendeſi, eſpreſſo venga per l' equazione ſeguente $dt = -\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}$; fatto il caſo della ſceſa, a ſegno che abbiaſi poi $dt = -\frac{dx}{u}$, in luogo di dt ſoſtituendovi il dato, haſſi $uu = aa - xx$ per le celerità, che cercanſi. Così fatto, differenziandoſi dipoi, è $udu = -xdx$, per lo che pigliando la formula propria num. 345., e tal valore ſoſtituendo, viene $f = \frac{u^m}{b^{m-1}} + x$. Si aſſegni adeſſo il valore, che piace alla m, e ſia $m = 2$, ed in luogo delle velocità, che riſultano, mettendovi il valore delle ritrovate, ſi ridurrà finalmente che $f = \frac{aa - xx + bx}{b}$, quale è la forza, che a ritrovar ſi preſe. Ad ogni qualunque caſo, che vogliaſi applicare il metodo, potrà ſervire l' eſempio propoſto, e perciò ad altro farem paſſaggio.

CA-

CAPITOLO III.

Del Movimento ne' mezzi variabili, riguardato in ambedue i supposti di potenza costante e mutabile.

DOvendo trattarsi la resistenza come variabile in questo presente Capo, con la potenza de' corpi unita, altro non viene ad intendersi con tal trattazione, ch' ammettere nel fluido diversa densità in luogo diverso, qual per appunto ei ciò viene ad esser quel tanto, che nello Scolio 2. al num. 339. considerato abbiamo, allorchè la resistenza per se sola si assunse a spiegare. A tal luogo adunque ci riportiamo per l' intelligenza della sua variabilità, e quivi alla medesima congiungeremo la potenza, la quale secondo il metodo fin ad ora ritenuto, costante primieramente la prenderemo, ed in secondo luogo variabile, stabilito prima il canone nell' esempio seguente.

ESEMPIO I.

397. Il raziocinio, e denominazione delle quantità più volte nominate, e legge sopra ritenuta, per il fatto presente avrà parimente luogo, onde si verifichi nella scesa, che sia per lo spazio, $f\,dx - R\,dx = -u\,du$, e l' altra per lo tempo $f\,dz - R\,dz = -du$; e per la salita $f\,dx + R\,dx = -u\,du$, come pure $f\,dz + R\,dz = -du$. Nell' ipotesi presente la resistenza R si vuole variabile, compresa nella densità $D = x^n$, e perciò ricorrendo allo Scolio II. poco fa citato, si fa, che $R = u^m x^n$. Laonde surrogando, eccone le legittime espressioni $f\,dx \mp u^m x^n\,dx = -u\,du$; ed $f\,dz \pm u^m z^n\,dz = -du$; dalle quali coll' Tav. 6. Fig. 1. e 4.

affe-

assegnare i valori alle dignità n, ed m, date ci verranno quelle affezioni de' movimenti, che trovar debbonsi, cioè le velocità, e tempi in un caso, e le medesime, e gli spazj nell' altro, come fin quì si è praticato. L' equazioni poi, che ne risulteranno non verranno al certo tutte nè coll' Algebra, nè per le note quadrature di Circolo, o Iperbola integrate, e perciò per non diffondersi inutilmente, alcuni casi, ne' quali potrassi in qualche forma ciò fare si tratteranno soltanto.

ESEMPIO II.

398. La forza sia costante, ed $m = 1$, cioè le resistenze alle semplici celerità proporzionali, ed $n = -1$ parimente, vale a dire le densità come z reciprocamente, o sia le resistenze variabili come la z, distanza dal punto C, assunta per i tempi, cioè $R = \frac{u}{z}$. Considerandosi lo scender del corpo, e prendendo l' anzidetto fissato canone, avremo che $z\,dz - u\,dz = -z\,du$; suppongasi ora, che $u = \frac{zy}{b}$, così che dipoi differenziandosi, si ha $du = \frac{z\,dy + y\,dz}{b}$, onde, ed u, e la sua differenza ivi ponendo, $b\,dz - y\,dz + y\,dz = -z\,dy$, cioè $\frac{b\,dz}{z} = -dy$; equazione dove separate vengono le indeterminate, e così da integrarsi in questa forma, $lz = -y + A$, quale viene alla Logaritmica con la sottotangente $= b$: sostituendo adesso di nuovo il valore d' $y = \frac{bu}{z}$, riescirà $lz = -\frac{bu}{z} + A$. Che venga $u = c$, cioè

cioè nel principio del movimento, dove eziandio $z = a$, e si è la costante $A = la + \frac{bc}{a}$; sicchè col sostituirla, si ha $\frac{azlz - azla - bcz}{a} = - bu$, cioè $\frac{zlz}{b} - \frac{zla}{b} - \frac{cz}{a} = - u$, che sono le velocità cercate.

399. Coll' intrapresa formula, secondo il consueto metodo dovrannosi in oltre ritrovare gli spazj, i quali gli avremo col surrogare nell' espressione per il caso $ds = - udz$, le già celerità antecedenti, e quindi sarà $ds = \frac{zdz.lz}{b} - \frac{zdz.la}{b} - \frac{czdz}{a}$, e coll' integrare $s + A = \frac{zzlz}{2b} - \frac{zz}{4b} - \frac{zzla}{2b} - \frac{czz}{2a}$. Quando $s = o$, vien pure $z = a$, onde è che $A = \frac{aala}{2b} - \frac{aa}{4b} - \frac{aala}{2b} - \frac{caa}{2a} = - \frac{aa}{4b} - \frac{ca}{2}$, laonde surrogando, hassi $s = \frac{zzlz}{2b} - \frac{zz}{4b} - \frac{zzla}{2b} - \frac{czz}{2a} + \frac{aa}{4b} + \frac{ca}{2}$, che è quel tanto, che cercasi.

COROLLARIO I.

400. Vedesi esser le prefate equazioni giustamente stabilite, poichè fingendo il grave nel punto A, allor quando $z = a$, le celerità sopra fissate divengono $- u = \frac{ala}{b} - \frac{ala}{b} - c$, cioè $u = c$, che è per appunto quel-

quello, che avvenir deve, perchè ivi tali ſi aſſumono, cioè l' iniziali.

COROLLARIO II.

401. Così parimente avverrà degli ſpazj, mentre nella prefata ipoteſi riſultano $s=o$, il che così è in fatti, poſciachè in A alcuno ſpazio non avvi ſcorſo.

COROLLARIO III.

402. Giunto che ſia il corpo in C, converteſi $z=o$, e perciò le velocità ſopra trovate $-u=o$, cioè a niente riduconſi, ed il moto ſarebbe di tal natura, che dalle reſiſtenze ivi infinite eſtinto diverrebbe; ſicchè mai il noto punto potrebbe trapaſſarſene il grave: ciò così eſſere ſi rileva parimente per eſſer ſuppoſta $z=o$, dalla eſpreſſione $R=\frac{u}{o}=\infty$, quale è l' ipoteſi, che ora abbiam trattata; riflettendo, che dalle infinite reſiſtenze le celerità zero divengono. Gli ſpazj altresì eſpoſti di ſopra, vengono $2s=\frac{aa+2cba}{2b}$.

COROLLARIO IV.

403. Scendendo dal punto di quiete, perchè così $c=o$, elle hannoſi perciò $-u=\frac{z.lz}{b}-\frac{z.la}{b}$ le celerità accennate, come altresì gli ſpazj ivi pure dedotti, $2s=\frac{zzlz}{b}-\frac{zzla}{b}-\frac{zz+aa}{2b}$ riſultano.

CO-

COROLLARIO V.

404. Colla ſuppoſizione medeſima dell'antecedente corollario del partir dalla quiete, fingendo, ch' in A ſtia il mobile, dove $z = a$, l' antecedenti celerità diverrebbero così $u = o$, e gli ſpazj pure $s = o$, quel, che in fatti è, perchè in A vienſi a ſupporre la velocità nulla, e perciò niente di ſpazio ſcorſo.

COROLLARIO VI.

405. Sempre partendo dalla quiete, e pervenuto nel punto C, dove diviene $z = o$, riſulta parimente la velocità detta $u = o$, e gli ſpazj altresì $2s = \frac{aa}{4b}$. Dunque ivi diventando zero le velocità, perchè una reſiſtenza infinita incontrano, non dovrà oltrepaſſare quel punto il grave, ſiccome per ſe è chiariſſimo; mentre eſtinguendoſi le medeſime, certo ſegno è, che ceſſa ogni azione nel grave predetto, per cui egli poſſa proſeguire il già principiato movimento.

ESEMPIO III.

406. Tutte le ſuppoſizioni dell' antedente eſempio reſtino, ſe non che prendaſi quì la ſalita del corpo, ſarà egli dunque $zdz + udz = - zdu$, o pure $zdz = - zdu - udz$, che ſi riduce ad integrarſi così $\frac{zz}{2} = - uz + A$: ed eſſendo $z = a$, onde è pure $u = c$, verrà $A = \frac{aa + 2ca}{2}$; ſicchè poi avremo

$aa +$

$\frac{aa + 2ca - zz}{2z} = u$, ed eccone la velocità.

407. Gli ſpazj poi hannoſi conforme il ſolito dalla legge $ds = udz$, perciocchè le velocità trovate intromettendovi, ne viene $ds = \frac{aadz + 2cadz - zzdz}{2z}$, dove integrandoſi, i medeſimi ne riſultano.

ESEMPIO IV.

408. Seguendo ad eſſere $n = -1$, vale a dire $D = \frac{1}{x}$, num. 397. col prendere che CB ſia lo ſpazio, ed altresì poi $m = 2$, che ciò vuol dir di ſupporre la reſiſtenza al quadrato delle velocità proporzionale, ed ancora quivi facciaſi $f = 1$; la ſtabilita, e propria eſpreſſione per la caduta riſulterà, come dall' eſempio I. ricavaſi, $dx - \frac{uudx}{x} = - udu$. Per averſi la maniera da poter l' equazione integrare, ſuppongaſi, che $uu = 2xy$; per lo che differenziando, haſſi $udu = xdy + ydx$; ed ambedue i valori ſurrogando, ne avremo, che è $xdx - 2xydx = - xxdy - xydx$; o ſia riducendo, $\frac{dx}{x} = - \frac{dy}{1 - y}$; ed integrando $lA + lx = l\overline{1 - y}$, ovvero levando i logaritmi, $A + x = 1 - y$; ſi reſtituiſca adeſſo il valore di $y = \frac{uu}{2x}$, e viene $A + x = \frac{2x - uu}{2x}$, e perciò fatto $u = c$, dove vien pure $x = a$, la coſtante è $A =$

2 a—

$\frac{2a - 2aa - cc}{2a}$, e col sostituirla $x = \frac{2x - uu}{2x} + \frac{2aa - 2a + cc}{2a}$, ed $uu = \frac{2aax - 2axx + ccx}{a}$, per le velocità cercate.

409. In questa ipotesi rimane ora da trovarsi i tempi scorsi, e così nel canone $dt = -\frac{dx}{u}$ surrogando, vengono essi $dt = \frac{-dx\sqrt{a}}{\sqrt{2aax - 2axx + ccx}}$, la quale equazione per non potersi da' metodi cogniti liberar da' radicali, non si potrà coll' Algebra integrare.

COROLLARIO I.

410. Arrivato da A fino in C il corpo, ivi diventa $x = o$; sicchè sono le velocità $u = o$, cioè di niun valore; e ciò ci dimostra, che le resistenze opporransi con forza infinita, come di fatto dall' esser $R = uuD = \frac{uu}{x}$, come sopra si rileva, facendo $x = o$, che infinita diviene la resistenza.

COROLLARIO II.

411. Da infinita tardità cominciandosi il moto, riescono allora, perchè $c = o$, $uu = 2ax - 2xx$: ed i tempi altronde $dt = -\frac{dx}{\sqrt{2ax - 2xx}}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

412. Nelle ipotesi medesime dell' antidetto esempio, prendasi il salir del corpo, verrebbe, col valore surrogato di $uu = 2xy$, l' equazione $xdx + 2xydx = - xxdy - xydx$, vale a dire $\frac{dx}{x} = - \frac{dy}{1 + 3y}$; e dividendo per 3, $\frac{dx}{x} = - \frac{\frac{1}{3}dy}{\frac{1}{3} + y}$. Si passi ad integrare, e sarà $lx = - \frac{1}{3} l \overline{\tfrac{1}{3} + y} + lA$; o sia $x^3 = - \frac{1}{3} + y + A$, dove restituendo il valore equivalente di y, sopra assunto, ch' è $\frac{uu}{2x}$, risulterà $x^3 = - \frac{1}{3} + \frac{uu}{2x} + A$, e nella forma consueta determinando la costante, viene $A = \frac{6a^4 + 2a - 3cc}{6a}$, e surrogando poi, $x^3 + \frac{1}{3} - \frac{uu}{2x} = \frac{6a^4 + 2a - 3cc}{6a}$, cioè col ridurre, $\frac{2ax^4 - 2a^4x + ccx}{a} = uu$, che sono le celerità; ed il tempo per conseguenza nell' equazione seguente $dt = \frac{\sqrt{a}.dx}{\sqrt{2ax^4 - 2a^4x + ccx}}$ verrà ritrovato.

COROLLARIO I.

413. Sappiamo, che in A stando il mobile, non deve egli avere altra velocità, che $= c$, qual' è per appunto l' iniziale, e perciò l' equazione se giustamente risulta, tale intelligenza ci deve somministrare; ed in fatti

fatti ivi essendo $x=a$, la sopra notata effettivamente ci dà

$$\frac{2a^5-2a^5+cca}{a}=uu\text{, cioè } u=c.$$

Nulla importa dimorar più nell' esemplificare, poichè riducibili l' equazioni non diverrebbero; per lo che all' altra considerazione delle forze variabili, secondo una legge qualunque delle distanze, farem passaggio, con le resistenze stesse altresì variabili, secondo la maniera, e forma, già ne' casi antecedenti praticata.

PROBLEMA GENERALE.

Le forze variando a norma delle distanze ad una qualunque potestà n elevate, ed il fluido variabile resista in ragione delle velocità coll' esponente m, ritrovare tutte le affezioni solite del movimento. Tav. 6. Fig. 1. e 4.

414. Restando tutto ciò come sopra, e giunto in B il grave, viene $fdx \mp Rdx = -udu$ num. 344. e 351. quando CB sia presa per lo spazio; perchè poi $f=x^n$ si vuole dal Problema, e perchè ancora num. 338. l' espressione del fluido variabile si è $R=u^m D$, sicchè nella fissata regola sostituendo, per la scesa, e salita insieme, si ha $x^n dx \mp u^m D dx = -udu$; donde secondo i valori agli esponenti generali dati, ed alla densità pure, ne dedurremo in primo luogo la celerità, ed i tempi egualmente, col sostituirla ne' già noti canoni de' medesimi.

415. Se AC prendasi per i tempi, tutto il discorso antecedente applicandovi, colle leggi per avanti stabilite, comprenderemo come sopra, e lo scendere, ed il salire del grave in quest' altra $z^n dz \mp u^m D dz = -du$; dalla quale, e velocità pure, e gli spazj verrannoci noti, secondo i casi, che tratterannosi.

Alcuni Esempj adesso si discuteranno, e quelli ne' quali le indeterminate separate divengono, per non estenderci in altri inutilmente.

ESEMPIO I.

416. Le forze si abbiano direttamente come le distanze, cioè $n = 1$, e le resistenze sieno come le velocità semplicemente assunte, con le densità insieme in ragione inversa delle distanze, cioè $m = 1$, e $D = \frac{1}{z}$; prendendosi il secondo caso del tempo, e sia l' ipotesi della scesa, il canone antecedente verrà $zdz - \frac{udz}{z} = -du$; facendosi ora, che $u = zy$, così che $du = zdy + ydz$, sostituendo ambi questi valori, viene $zzdz - zydz = - zzdy - zydz$, cioè $dz = -dy$. Integrando adunque, $z = -y + A$, ed il preso valore d' y restituendo nuovamente, si ricava $z = -\frac{u}{z} + A$. Facendo che sia $z = a$, dove è pure $u = c$, la costante verrà $A = \frac{aa + c}{a}$, onde surrogandola, $z = -\frac{u}{z} + \frac{aa + c}{a}$, cioè $-u = \frac{azz - aaz - cz}{a}$, ed eccone le celerità.

417. Colla precedente formula, perchè le distanze z ci rappresentano i tempi, rimarrà adesso da ritrovarsi gli spazj, per essi tempi datici; sicchè in $ds = -udz$ surrogandovi il già sopra trovato valore di $-u$, ne viene $ds = \frac{azzdz - aazdz - czdz}{a}$, e quì pu-

re integrando, $A + s = \frac{z^3}{3} - \frac{az^2}{2} - \frac{cz^2}{2a}$; e la coſtante $A = -\frac{a^3 - 3ca}{6}$, determinata con le note regole: per lo che ſurrogandola, vien finalmente lo ſpazio cercato $s = \frac{2az^3 - 3a^2z^2 - 3cz^2}{6a} + \frac{a^3 + 3ac}{6}$.

C O R O L L A R I O I.

418. Dalla quiete diſcenda il grave, perchè in tal caſo dovrà eſſere $c = o$, le ſopra notate celerità saranno $-u = zz - az$, cioè $u = az - zz$; e gli ſpazj antecedenti altresì verranno $6s = 2z^3 - 3az^2 + a^3$.

C O R O L L A R I O II.

419. E quando $z = o$, ſon le medeſime $u = o$, e gli ſpazj $6s = a^3 + 3ca$; e dalla quiete avendoſi dato principio al movimento, $6s = a^3$ vengon queſti.

E S E M P I O II.

420. Le forze aſſunte alle ſemplici diſtanze proporzionali, e l' eſponente delle velocità $m = 2$, le denſità poi $D = \frac{1}{2x}$, che tanto viene a dire, che le reſiſtenze ſieno variabili reciprocamente in ragione del doppio delle diſtanze dal centro, queſte aſſunte per gli ſpazj, prendendoſi il canone della ſalita, ſi ha $-2xxdx = uudx + 2xudu$. Se integreremo, verrà così $-$

$\frac{2x^3}{3} = uux + A$; e fatta $x = a$, che è pure $u = c$, hassi per la costante $A = -\frac{2a^3 - 3cca}{3}$, quindi surrogando tal valore, le velocità riescon così $uu = \frac{3c^2a + 2a^3 - 2x^3}{3x}$.

Si può notare dall' indole dell' equazione, che sempre la formula diverrà integrata coll' Algebra, quantunque le forze avesser la loro proporzione maggiore, che delle semplici distanze supposte, qualora però unitamente fissa rimanga la ragione delle velocità, e delle densità, come poco innanzi si è fatto.

421. Il tempo sarà poi $dt = \frac{dx\sqrt{3x}}{\sqrt{2a^3 + 3c^2a - 2x^3}}$; e $t = \int \frac{dx\sqrt{3x}}{\sqrt{2a^3 + 3c^2a - 2x^3}}$, coll' integrarlo.

COROLLARIO I.

422. Senza velocità iniziale, posto salirsene il grave, perchè in tal caso $c = 0$, verrà $u^2 = \frac{2a^3 - 2x^3}{3x}$, ed i tempi $t = \int \frac{dx\sqrt{3x}}{\sqrt{2a^3 - 2x^3}}$.

ESEMPIO III.

423. Suppongasi $n = 1$, ed $m = 2$, e le resistenze

ze varino pure direttamente come le distanze, qualmente è delle forze, che ciò s'esprime con $D = x$; si ha in tal caso dalla formula, prendendo la scesa, $xdx = -\frac{udu}{1-uu}$, o pure $-xdx = \frac{udu}{1-uu}$. Integrando adesso, $A - \frac{xx}{2} = -l\,\overline{1-uu}^{\frac{1}{2}}$, e la costante seguendo il metodo solito, $A = \frac{aa}{2} - l\,\overline{1-cc}^{\frac{1}{2}}$; sicchè poi risulterà $aa - xx = l\,\overline{\frac{1-cc}{1-uu}}$. Si riduca l'equazione a' logaritmi iperbolici, supposto q quella quantità, di cui il logaritmo sia l'unità, cioè $lq = 1$, avrassi $aa - xx : 1 :: l\,\overline{\frac{1-cc}{1-uu}} : lq$, o sia facendo le necessarie operazioni, $uu = \overline{cc-1} \times q^{xx-aa}$, che sono le celerità, che voglionsi.

424. Per il tempo altresì, queste surrogando in $-\frac{dx}{u} = dt$, viene $dt = \frac{-dx}{\sqrt{\overline{cc-1} \times q^{xx-aa} + 1}}$.

ESEMPIO IV.

425. E se $n = 1$, ed $m = 1$, e $D = x$, onde vengane dalla formula sopraccennata, l'equazione $xdx - uxdx = -udu$, ovvero $xdx = -\frac{udu}{1-u}$, partito in due membri questo termine ove esistono le velocità, e che

e che allo stesso sieno equivalenti, ne avremo $x\,dx = du - \frac{du}{1-u}$, perciocchè integrando, $A + \frac{xx}{2} = u + l\,\overline{1-u}$, e la costante $A = \frac{-aa}{2} + c + l\,\overline{1-c}$; sicchè tal valore ivi ponendo, risulterà $xx - aa = 2u - 2c + l\frac{1-u}{1-c}$, da dove hannosi le celerità, e per conseguenza i tempi.

COROLLARIO I.

426. Facendolo il moto dar principio dalla quiete, sicchè $c = o$, allora saranno queste $xx - aa = 2u + l\frac{1-u}{1}$.

COROLLARIO II.

427. Dalla natura dell' equazione dell' esempio proposto scorgesi evidentemente, che sempre le indeterminate saranno separabili, quando le ragioni delle forze variabili sieno sempre in quella stessa direttamente, che le densità, quantunque poi le velocità, con le resistenze proporzionali, abbiano l' esponente di qualsivoglia valore, positivo però restando.

SCOLIO.

428. Gli esempj antecedenti ci han fatto vedere, che collo stabilimento delle formule nel Problema generale, dalle assegnate ragioni delle forze, e dalla densità,

tà, o pure variabilità del mezzo, presa essa pure come una funzione delle distanze, siam pervenuti al ritrovamento delle velocità, e tempi, come anche delle velocità, e spazj, secondochè assunta venne l' espressione. Per converso poi valendoci della medesima formula, col prendere date le velocità, ed una condizione, verbigrazia, che sien le forze, si verrà a trovare altresì la variazione del fluido; o pure con le celerità assunta la variazione del fluido, le forze assegnate, e dateci risulteranno. Dagli spazj dati, o pure tempi, poichè nella più volte notata espressione, allora date vengono le velocità, da questi pure ricaverebbonsi le già dette ricerche; il che per brevità, rispetto a questi si tralascierà stender gli esempj, e soltanto delle date celerità e potenze, come poco fa si è avvertito, per ricavarne quelle leggi necessarie, prenderò a farne vedere qualche caso, assumendo quelli però, ne' quali possono l' equazioni esser ridotte, e ciò per farne conoscere del metodo l' evidenza.

PROBLEMA GENERALE.

Date le velocità, e le forze pure in una ragione qualunque delle lontananze dal centro, o punto dato, trovare la densità, o vogliam dire la variazione del mezzo.

429. Nient' altro si farà, che riassumere le formule per ambedue i casi delle lontananze prese, o per gli spazj, o per i tempi, sì della scesa, che della salita $x^n dx \mp Du^m dx = -u du$, e l' altra $z^n dz \mp Du^m dz = -du$; quivi posciachè date sono le velocità, e la forza espressa per le solite distanze, surrogando la predetta celerità dove fa di bisogno, ne risulteranno le den-

densità necessariamente, come ben vedesi.

ESEMPIO I.

430. L' equazione $u^2 = \frac{2a^3 + 3c^2a - 2x^3}{3x}$, ci esprima le date celerità, le quali sono quelle, che ritrovate furono direttamente al num. 420. le forze poi assegnate alle semplici distanze sieno in ragione, onde $n = 1$, ed $m = 2$ l'esponente delle velocità; prendendosi la salita, sarebbe pertanto la formula prima, $xdx + uuDdx = - udu$. Adesso dalle già notate velocità vogliasi avere la densità, che si cerca: differenziandole adunque, verrebbero $udu = dx \times \frac{-4x^3 - 3ac^2 - 2a^3}{2.3xx}$, questo valore poi di udu sopra nella formula surrogato, si ha $- 6x^3 - 6x^2u^2 D = -4x^3 - 3ac^2 - 2a^3$; cioè riducendo come devesi, $\frac{-2x^3 + 2a^3 + 3ac^2}{6x^2u^2} = D$; quì pongasi in luogo di u^2 il suo valore già dato, e viene $D = \frac{1}{2x}$, quale è la Densità presa a cercare, e ch' in punto è quella, che per data avendosi presa al num. sopraccitato, con la supposizione delle forze stesse, e dell' esponente m parimente, dove direttamente queste assunte velocità trovate vennero.

ESEMPIO II.

431. Prendansi le velocità ritrovate al num. 416. e queste per note al presente caso, le quali sono $-u =$

$\frac{az^2 - a^2z - cz}{a}$, date, come vedesi, per le lontananze come tempi considerate, onde è, che l'altra formula prenderemo. Le forze sieno nella semplice diretta delle distanze, vale a dire $n = 1$, ed $m = 1$ eziandio. Presa per tanto la discesa con queste condizioni, avremo $z\,dz - u\,D\,dz = -du$; le velocità poi assunte differenziate, e le finite sostituendovi, viene l'equazione $z\,dz + \frac{D \times \overline{az^2 dz - a^2 z dz - czdz}}{a} = \frac{2azdz - aadz - cdz}{a}$, e riducendo $-az + aa + c = D \times \overline{-azz + aaz + cz}$; vale a dire $D = \frac{1}{z}$, che sono le densità del fluido, in quella stessa ragione, che al num. citato per cognite prese furono direttamente, e perciò per converso provasi l'aggiustatezza delle trattazioni dirette.

E S E M P I O III.

432. L'ordinata al circolo del raggio $= a$, la di cui espressione sia $aa - xx = uu$, ci esprima le date velocità, essendo le medesime, in qualche maniera, una tal qual funzione delle distanze x; e la forza al punto dato tendente sia $= x$ parimente. Perciocchè prendendo il primo canone, e per la discesa, troveremo, che è $x\,dx - u^m D\,dx = -u\,du$; differenziando le assunte velocità già date, viene $-x\,dx = u\,du$, laonde quì ponendo il respettivo valore, si riduce che $u^m D\,dx = 0$; cioè le den-

densità sono nulla; che egli è lo stesso del dire, che le velocità date ci producono il moto fatto nel voto, unitamente con la condizione delle forze proporzionali alle lontananze. Così realmente avvenir deve, poichè si è scorto trattando i Problemi diretti nella parte prima, che al num. 217. la forza variando, come le lontananze produsse quella velocità, che ora abbiam supposta data: altresì ne' conversi egualmente abbiam veduto al num. 270. che presa questa espressione di velocità, le forze stesse riproduce. Per lo che accoppiando, e tal forza, e tal velocità, ci deve dare quel tal moto, che là si tratta, quale è nel vacuo; ed altrettanto seguirebbe d'ogn'altra consimile ipotesi nel vacuo ivi supposta, e che quivi si prendesse ad osservare. Farò passaggio adesso all'altro inverso Problema, consistente nell'assumere le velocità come sopra per cognite; ma che per date poi abbiansi le densità, o sia la variazione del fluido, per cavarne da ciò le forze egualmente.

P R O B L E M A.

Assegnata la ragione delle densità, o sia della variazione del fluido, e quella delle velocità data pur sia, ritrovare la forza del corpo.

433. Ricavasi dal canone stesso stabilito al Problema generale num. 414. $fdx \mp u^m Ddx = -udu$, ed $fdz \mp u^m Ddz = -du$: quindi dalla proporzione, che assegnata verrà alla celerità, ed alle densità altresì, vedesi manifestamente, che le potenze saranno cognite, come qualche funzione delle lontanze.

ESEM-

ESEMPIO I.

434. Quelle velocità, che trovate furono al num. 406. si prendano ora per date, e le quali sono $u = \frac{aa + 2ca - zz}{2z}$. Le densità altresì stieno nella ragion reciproca delle distanze, vale a dire così $D = \frac{1}{z}$, ed $m = 1$. Laonde surrogando nella formula, hassi $\frac{fzdz + udz}{z} = -du$, prendendo la salita; ed il caso de' tempi. Se poi si differenzierà la velocità, per data già presa, avremo $\frac{udz + zdz}{z} = -du$, e questo valore di $-du$ ivi surrogando, eccone il risultato $fzdz + udz = udz + zdz$, cioè $f = 1$; cioè a dire le forze costanti, che son tali, e quali assunte furono direttamente, e con la medesima densità pure, ed $m = 1$ al numero citato, e che altronde le predette velocità somministrarono; quindi, per converso provasi la quistione diretta essersi giustamente eseguita.

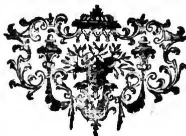
ESEMPIO II.

435. Pongasi essere $m = 2$, e le densità $D = \frac{1}{2x}$, assumendo il salire del mobile, avrebbesi pel caso delle forze nello spazio, $-fdx - \frac{uudx}{2x} = udu$. Ciò posto, la velocità data sia quella del num. 420. uu

 $= 2a^3$

$= \frac{2a^3 + 3ac^2 - 2x^3}{3x}$, differenziata, e sostituita sopra, ne viene $-6fxx + 4x^3 + 3ac^2 + 2a^3 = 3u^2x$; ed in luogo di u^2 sostituendo il suo valore, $-6fx^2 + 4x^3 + 3ac^2 + 2a^3 = 2a^3 + 3ac^2 - 2x^3$, o sia ripurgando l' equazione, $f = x$; cioè le forze come le distanze dal punto dato, e son quelle stabilite nel trattarsi direttamente, con le densità stesse num. citato. Ovvero più brevemente, siccome si ha $3xuu = 2a^3 + 3ac^2 - 2x^3$, differenziando pure, risulta $udu = \frac{-2x^2dx - u^2dx}{2x}$, e sostituendo, $-fdx - \frac{uudx}{2x} = \frac{-2x^2dx - u^2dx}{2x}$, cioè $f = x$. Serviranno gli Esempj apportati per l' intelligenza del metodo; onde è, che a questa seconda Parte del rettilineo sarà posto fine.

Fine del Libro I.



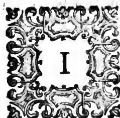
MEC-



MECCANICA SUBLIME *DIMOSTRATA* COLL' ALGEBRA

LIBRO II.

Del Moto Curvilineo.



Il Moto Curvilineo, di cui nel presente Libro a parlar prendesi, verrà inteso da me esser quello, in ispecie, che da' Matematici Moto Curvilineo libero suole appellarsi. Con un tal nome di Libero nient' altro vuolsi significare pertanto, se non che egli è un moto nelle curve liberamente fatto, vale a

le a dire, che nè date, nè assegnate spezialmente queste ci vengono, come per quel tal cammino, per cui il projetto scorrer necessariamente debba. Da quanto occorrerà osservare nella Parte prima del presente Libro, e da quello, che nella seconda eziandio scorgeremo, manifestamente apparirà, che dalle potenze in un caso, e dalle potenze unitamente con le resistenze nell'altro, ha il grave determinata la strada, o vogliasi dire la Curva, per cui camminar dee, ma però da niun' altra cagione è indotto poi, quella qualsisia tale strada, o cammino a ritenere; e quindi è che prende il nome di moto curvilineo libero, a differenza dell'altro Curvilineo non libero, mentre a produrre il medesimo, oltre di concorrervi, e forze, e potenze, come nel libero abbiam divisato, vi è di più, che il cammino, o curva, per cui scorrer deve, gli viene particolarmente determinata. Di questo ultimo un saggio se ne portò allor quando la Teoria della Cicloide, e del Circolo si prese a trattare, assegnandone le leggi nel Capo IX. e X. e perciò in altra estenzione non sarà ulteriormente riguardato. Chi poi un'intiera nozione del medesimo acquistar volesse, potrà facilmente ottenerla dalla Meccanica insigne dell' Eulero nel tomo 2. mentre sopra questo tal movimento unicamente ella versa. Da me pertanto del primo libero solamente si esamineranno i trattati, dividendolo, e maneggiandolo nella forma seguente.

PAR-

PARTE I.

Del Moto Curvileneo nel Voto.

IL metodo del Libro I. ritenendo, si dividerà questo secondo in due Parti egualmente. In questa I. del moto curvilineo nel vacuo, si spiegheranno gli andamenti, e le leggi verranno fissate, e nella seconda faraffi il medesimo, applicandole nel mezzo resistente, o vogliam dire nel pieno.

CAPITOLO I.

Della Natura, e dichiarazione d'alcuni principj del moto Curvilineo.

LE linee curve, che del movimento curvilineo d'un corpo sono la strada, e la direzione, tanto da' Matematici antichi, che moderni considerate vengono, che composte elle sieno d'infinite linee rette, le quali fra di loro facciano un angolo d'assegnata misura, benchè infinitamente piccolo di qualunque ordine. Onde da questa posizione ne nascerà l'intelligenza, ch'il loro composto altro non sia, ch'un aggregato d'infiniti piani inclinati, ovvero che la curva stessa altro in effetto non sia ch'un Poligono d'infinità di lati composto.

Da varj, e diversi moti debbono ancora necessariamente generarsi, poichè un sol moto, conforme abbiam veduto, una linea retta produce, e perciò se da questa retta

retta direzione debbano deviare le Curve, ficcome in fatti è, di più direzioni per confeguenza debbonfi effe comporre. Le caufe efficienti per tanto, e la formazione delle Curve predette anderemo brevemente efaminando, che è quanto il dire, di far l'analifi del moto curvilineo. Proporremo di poi alcuni principj neceffarj per ben comprendere il metodo, con cui dobbiamo procedere, e poi fucceffivamente le leggi, che a tal moto competono verranno fpiegate, e ftabilite.

ESEMPIO I.

Tav. 7. Fig. 1. 436. Dal punto *A* per la retta *AD* fpinto venga un mobile da qualche impulfo, o qualfifia forza, e che nel tempo fteffo fingafi altresì da qualfivoglia altra potenza fpogliato, acciocchè dalla predetta direzione deviare non poffa, feguirebbe per confeguenza direttamente per la retta *AD* il fuo cammino, per quanto le leggi de' Meccanici ci iftruifcono. Prefo un tempo, che fia infinitamente piccolo, fingiamo, che in quefto fino al punto *D* poffa arrivare in vigore della citata forza fpingente; perchè però nello fcorrere fi vuole dotato in fe fteffo il corpo predetto d'una tale altra forza, che per adeffo porremo, che fia la Gravità, la quale per la direzione *AS* lo guidi con la fua energia, non farà in fatti vero, ch'in *D* foffe giunto, perchè dalla direzione *AD* l'avrà quefta fatto declinare. Onde fupponiamo, che per la piccola linea $BA = DG$ fi rapprefenti l'impulfo fuo, la diagonale *AG* verrà ad effer la traccia, che in virtù delle due forze avrà il grave tenuta, fecondo che manifeftamente apparifce dalle leggi del moto compofto. Replicando il raziocinio, nel fecondo iftante di tempo, al primo eguale, in vigor della

la prima forza di projezione per la GK ſcorrerebbe, e nel punto K ſarebbe giunto, ſe la gravità con il ſuo replicato impulſo $OK = MG$, non l'aveſſe per la diagonale GO tirato, e nel punto O fatto arrivare. Nell' altro terzo iſtante accaderebbe lo ſteſſo, e la diagonale OH ſarebbe la ſtrada dal grave tenuta. Per lo che le tante diagonali, da queſti due moti infinitamente piccoli prodotte, formerebbero eſſe la Curva AH, la quale, come vedeſi, anche da queſti infiniti piani inclinati viene ella ad eſſer compoſta; e con tal compoſizione altresì verremo ad aver formato, in virtù de' due prefati movimenti, quel moto Curvilineo, di cui preſentemente ſi viene a parlare.

437. La potenza, o forza di gravità l' ho aſſunta con tal legge, ch' eſerciti gli impulſi ſuoi per direzioni ſempre fra loro mantenute parallele; mentre per averſi, che lo ſpazio è infinitamente piccolo con la diſtanza, o lontananza dal centro paragonato, le linee perciò a queſto condotte, come parallele aſſumer ſi poſſono, ſiccome fu in altra parte avvertito. Per un minimo ſpazietto altresì, che la potenza lo neceſſiti, potrà pure inferirſi, che quantunque la medeſima variabile foſſe, coſtante, e uniforme però, ſenza taccia d' errore alcuno potraſſi aſſumere, da quello, che altre volte ancora ſopra venne notato.

Nell' analiſi antecedentemente fatta ſi è oſſervato, che la curva verſo la direzione della potenza di gravità rivolge la concavità ſua; ſi può però diverſamente deſcrivere, vale a dire, che verſo della direzione della potenza, o ſia del centro moſtri il conveſſo, come apparirà dell' Eſempio ſeguente.

ESEMPIO II.

Tav. 7. Fig. 2. 438. Ora dunque ſuppongaſi, che con forza gettato ſia il projetto del punto A; quì pure giova l'ammetter per ſuppoſto come ſopra, che d'altra potenza reſti privo per un iſtante di tempo, finchè giunto ſia nel punto T, in vigor della prima forza di projezione. Ma perchè non ſarà vero, che della gravità reſti per tal momento ſpogliato, quindi fingiamo, che nel predetto iſtante l'aveſſe per l'energia ſua, in Tb rappreſentata, fino al punto b reſpinto: la diagonale Ab verrà ad eſſer la ſtrada, che da queſti due moti ha il grave tenuta. Per l'altro eguale iſtante, per la forza prima in C procederebbe, ſe dalla gravità non foſſe in o reſpinto; onde è, che l'altra diagonale bo deſcriverebbe; e così nell'altro iſtante applicando il raziocinio, finalmente di moto compoſto, tutte le altre diagonali, che verranno a formare una Curva An, ei ſcorrerebbe il grave, e la Curva alla direzione, o centro delle forze rivolgerebbe nel modo ſpiegato il conveſſo, che è l'altro caſo ſopra indicato.

COROLLARIO I.

439. Queſta tal forza, che così conveſſa ha prodotta la Curva, da alcuni ſi nomina forza centrifuga, da me però, perchè per la centrifuga altra affezione di potenza intender ſi vuole, conforme fra breve vedremo, ſarà inteſa col ſolito nome, o di attraente, o repulſiva, ſecondochè ne' caſi ſimili del moto rettilineo fù notato.

CO-

COROLLARIO II.

440. Per questi predetti curvilinei moti varranno altresì le medesime leggi, e principj, che per l'avanti ne' rettilinei ammessi furono, applicandoli con quella moderazione, e riguardi, che in appresso vedremo. Però siccome per se stessi soli non sarebbero sufficienti per abbracciare la completa intelligenza, che al curvilineo moto è necessaria, almeno secondo il metodo, che prefisso mi sono di ritenere, onde è, che ad altri principj pure sarà d'uopo ricorrere.

SCOLIO I.

441. Il grande Ugenio, uno fra i più elevati ingegni, ch' abbiano l'età prodotto, concepì che qualora un grave nelle curve si move, s'investe egli d'una tal qual forza, in virtù della quale tenta continuamente di recedere dal centro, ove sono le forze dirette, o tendenti; e questo tale continuo sforzo lo opera sempre per una direzione perpendicolare alla curva, per cui cammina. Questo sforzo d'allontanarsi è quello, che esso chiama forza Centrifuga, con gli altri egualmente ancora, che di poi l'hanno seguito. Sarà in quest' Opera, per quella parte, che riguarda i moti curvilinei, adattato da me eziandio un tal principio, poichè reso ormai si è presso tutti indubitabile, siccome anche il nome della forza stessa ritenuto, la quale poi conforme si concepisca prodursi, ed operare più a basso sarà dichiarato.

SCOLIO II.

442. Riguardando la natura, e riſoluzione del moto Curvilineo libero, ſi vede per ſe chiaramente, ch'il medeſimo non può eſeguirſi, quando che mantenuto non ſia in equilibrio da due equivalenti forze. Il celebre Giovanni Bernoulli preſe per metodo nello ſcioglimento d'alcuni problemi, in fatto del corpo moſſo con tal movimento nel pieno, queſto fertiliſſimo ed evidente principio, e per una di queſte forze, la precedente già detta Centrifuga venne ad aſſumere, e per l'equivalente, o a queſta eguale, quella potenza tendente al centro del circolo *oſculante*, o combaciante la curva intromeſſe, da eſſo *normale* di gravità appellata, la quale, come dalla definizione ſi ſcorgerà, Centripeta da me chiameraſſi. Il dottiſſimo Padre Riccati, di tal teorica d'eguaglianza delle due anzidette forze ſi valſe eſſo pure, e con maeſtria ne' moti curvilinei liberi fatti nel voto, l'applicò felicemente, conforme in particolare dagli Atti dell' Iſtituto delle ſcienze di Bologna ſi ſcorge, e ne' Dialoghi delle forze vive ſi può eziandio lo ſteſſo ſenſo ravviſare.

Queſto ſteſſo fondamento, e principio delle due forze eguali ne' ſeguenti moti curvilinei, che ora ſi trattano, ſarà da me ſtabilito, e non ſolamente nel voto verrà ampiamente maneggiato, ma altresì nel mezzo reſiſtente in virtù di queſto ſaranno le quiſtioni tutte riſolute. Reſta adeſſo, che per procedere con la intelligenza neceſſaria, ſe ne faccia vedere delle predette due forze come l'eguaglianza loro ſi verifichi; dipoi premetterò altre nozioni neceſſarie per proſeguire a mettere in pratica le leggi, e canoni, che dagli ſtabiliti principj deduconſi.

LEM-

L E M M A I.

Nel moto circolare come si verifichi l' eguaglianza delle due nominate forze. Tav. 7. Fig. 3.

443. *DAS* sia un circolo col centro *C* descritto, e col raggio *CD* = *r*, e per cui cammini un grave, il quale dal punto *D* qualsisia gettato pongasi, in virtù d' una forza, o cagione qualunque per la direzione *DT*. Se per un momento facciasi la supposizione, che in questo tal projetto ei cessasse d'agire quella potenza, che verso il centro *C* lo tira, e necessita a scendere, certo è, che per la *DT*, fatta tangente, sarebbe indotto direttamente a viaggiare, conforme è notissimo. In sequela di tal discorso concedasi, che giunto sia in *T* in un tempo minimo, condotta l' infinitamente prossima *CT*, vedesi, che in tale istante dal centro allontanato sarebbesi per la differenza del raggio, o sia per lo spazio *NT*, alla curva stessa perpendicolare. Tale allontanamento, e per lo spazio predetto si concepisce seguito in vigor d' una forza, la quale per appunto è quella, che dal citato Ugenio Centrifuga s' appella. A contrario poi, perchè realmente la potenza del corpo al centro tendente lo spinge incessantemente, non si ritroverà di fatto nel punto *T*, ma bensì in *N*; laonde l' effetto di questa tal forza ha prodotto, che da *T* l' ha necessitato nel tempo stesso a scorrere per lo spazio *NT*; quindi deducesi, che quanto la Centrifuga dal Centro nel medesimo istante l' avrebbe respinto per lo spazio *NT*, altrettanto per lo spazio medesimo l' altra potenza, che al centro lo guida, ve l' avrà fatto approssimare; e perciò ecco in che modo ambedue saran desse eguali fra loro; e così pure manifestamente scorgesi, come in equilibrio di punto in punto, acciocchè

ciocchè per lo circolo cammini, conserveranno il grave suddetto; come ciò s' adatti poi ad ogni altra Curva, nel Lemma, che segue vedrassi.

COROLLARIO I.

444. La forza centrifuga nascer necessariamente deve dall' altra detta d' Inerzia; poichè nel prefato punto D, donde inteso viene essersi mosso il projetto, per natura della ricordata forza d' Inerzia, seguirebbe a restare nello stato di moto per la tangente DT, quando da altra non venisse egli disturbato. Per lo chè in conseguenza della medesima la centrifuga ne deriva, mentre nel proseguimento del moversi a restare sforzandolo, il dilungamento dal centro con tale effetto produce.

LEMMA II.

Tav. 7. Fig. 4. e 5. *In ogni Curva, ch' il projetto cammini, il principio delle due potenze fra loro eguali avrà sempre luogo.*

445. Per una Curva di qualsivoglia specie AB scorra un grave, il quale nel punto arbitrario D venga il medesimo attratto dalla potenza supposta la gravità, e che in esso risiede, verso del centro delle forze per la direzione DS. Nel punto stesso si tiri alla curva la tangente DT, e ponendo, ch' il valore di questa forza centrale sia DK, condotta al punto D la perpendicolare CD, e dal punto K una a perpendicolo a questa predetta DC, e sia KH, è per se noto dalla risoluzion delle forze, che la potenza DK in due equivalenti risolvesi, cioè, e nella perpendicolare DH, e nell' altra KH, o sia DT, che tangenziale si nomina, siccome si notò al num. 147. eziandio del moto cur-

curvilineo necessario parlando. Così fatto, si descriva un cerchio, che nel punto *D* sia combaciante la curva, qual sia *DLM*, ed il di cui centro *C*; la potenza di gravità in tal caso, per la fatta risoluzione, viene a dirigersi per la *DC*, vale a dire, verso il centro del circolo predetto, e per la tangente in tal punto *D*. Si ponga in oltre, che per un elementare spazietto *DO* dell'accennata curva trapassi il projetto, attesa la sua picciolezza, si pareggierà, o confonderà con lo spazietto del circolo, e quindi accaderà lo stesso di quel, che se per una porzione di circolo ei viaggiasse, e per conseguenza ancora con moto equabile, con quella velocità, di cui nel punto *D* erane affetto. Per lo che tutto ciò, che nel precedente Lemma venne stabilito, relativamente al moto circolare del corpo, s'adempirà in tutto, e per tutto nel predetto elementare spazietto di Curva; cioè la forza centrifuga avrà perpendicolarmente la sua direzione alla curva, e sarà parimente all' altra eguale di gravità, che per la risoluzione anch'essa ha la tendezza al centro del circolo, ed alla curva egualmente perpendicolare, e ne seguirà altronde l'equilibrio in vigor delle medesime due forze. Ammettendo poi il raziocinio per ogni altro elementare spazietto, del quale la curva si genera, sarà sempre vero il sentimento, e così per li moti curvilinei saran parimente vere quelle leggi, che dal moto in particolare del circolo sonosi dedotte, e che occorreranno dedursi consecutivamente.

COROLLARIO I.

446. Qualora la curva fosse convessa alla tendenza delle forze fig. 5. risolvendo, come vedesi, le medesime, nient'altro di variazione accaderà, che la mutazione

zione de' segni, conforme si rileverà in appresso, stabilendo le leggi di tali moti.

COROLLARIO II.

447. Se varie fossero le potenze sollecitanti il mobile verso del centro, che diverse direzioni avessero, purchè nel piano stesso, sempre sarebbe in nostro potere risolverle in una, ch'alla curva fosse a perpendicolo, ed in altra tangenziale, come sopra venne fatto, di che può consultarsi gli Autori, essendo sufficiente per lo caso nostro la risoluzione accennata.

Per la necessità, ch' avrò d' intromettere la forza Centrifuga per maneggiare le trattazioni de' Moti Curvilinei, stimo necessario ritrovarne la sua equazione.

LEMMA III.

Tav. 7. Fig. 3. *Ritrovare nel Circolo l'espressione, o formula della forza Centrifuga.*

448. Restando le denominazioni, e costruzione dal Lemma I. nel Circolo DAS del raggio $= r$, prendasi nel punto D a considerare il corpo, ch'in esso movesi di velocità nota fornito $= u$. Perchè DN arco circolare, di moto equabile, e con la velocità predetta si scorre, ed altresì con la tangente DT si può pareggiare, per quel tanto, che dagli infinitamente piccoli è dimostrato, chiamato il tempo, in cui si passa $= t$, ne verrà $\frac{DT}{u} = t$, secondo le note leggi. Dal Lemma predetto costa eziandio, che NT sia quel tale spazio, per cui in virtù della forza contrifuga il grave dal centro C si è discostato, che per essere spazietto elementare, equa-

equabilmente pure ſuppor potraſſi eſſere ſcorſo; ſicchè la forza predetta nominata $= f$, ſarà $NT = \frac{f t^2}{2m}$, num. 63. In oltre non può giungere per lo ſpazio NT nel punto T il projetto, ſe nel tempo ſteſſo da D non pervenga parimente in T, cioè il tempo per trapaſſare DT, è eguale a quello, che trapaſſerebbe per NT. Dunque in luogo di t^2 ſurrogandovi $\frac{\overline{DT}^2}{uu}$, ne riſulta $NT = \frac{f.\overline{DT}^2}{2muu}$. Euclide ci inſegna, che $\frac{\overline{DT}^2}{NT} = 2r$, ſicchè finalmente ponendovi un tal valore, ne viene $f = \frac{mu^2}{r}$, che è la forza Centrifuga ricercata, proporzionale alla maſſa del corpo nel quadrato della velocità data, e diviſa per lo raggio del circolo ſteſſo. Siccome poi, Lemma antecedente, tutte le affezioni del moto nel circolo, per qualunque elementare ſpazietto di Curva convengono, e perciò la formula quì trovata, per lo projetto, ch' in eſſa cammina ſarà parimente applicabile.

Reſtavi adeſſo il vedere in pratica maneggiati queſti ſtabiliti principj, il che ſi farà in tutte le trattazioni de' moti curvilinei ſeguenti di queſt' Opera, principiando da quelli nel vacuo eſeguiti, conforme richiede il metodo.

CAPITOLO II.

Della trattazione delle quistioni tanto dirette, che inverse del moto curvilineo, supposte le forze ritener verso del centro la direzione parallela fra loro.

449. La tendenza delle forze, o potenze verso il comune punto, ove queste sono dirette, in due aspetti, ne' movimenti curvilinei devesi riguardare. Nel primo sarebbe d' allorchè il centro in tanta, e tale lontananza vien collocato, che quelle direzioni delle potenze de' corpi verso d' esso, come fra loro parallele esistenti, possonsi considerare, quando che in diversi punti questi sopraccitati gravi ritrovansi, siccome notato abbiamo al num.437. l'analisi del presente moto facendo. Come, per cagion d' esempio, segue della Gravità sopra la superficie della Terra, o pure a poca distanza da questa, la quale a nostra vista necessita i corpi tutti a cadere con direzioni parallele fra loro, atteso il poco spazio, che scorrono, in paragone di quello, che dal centro loro vi passa. Un altro esempio può sotto gli occhj nostri cadere, quale è quello de' raggi provenienti dal Sole, i quali, benchè da un sol punto, come loro centro, quale è il Disco solare, essi derivino, pur non ostante all'apparenza nostra, sono sopra la Terra ciaschedun d' essi paralleli, poichè tutte parallele sono l' ombre, per le quali, da qualche impedimento del loro passaggio, vien questa nostra superficie adombrata.

450. Nell' altro aspetto al predetto contrario, la tendenza delle potenze verso del centro devesi considerare; cioe venendo in diversi punti il grave situato, le forze,

forze, come sopra tendono al già nominato punto, egli è vero, ma le loro direzioni parallelamente a questo tendenti assunte non sono. Nel moto Curvilineo tanto nel vacuo, quale ora si tratta, che nel pieno, avranno ambedue queste ispezioni il luogo loro; onde è, che ciascheduna delle Parti di questo 2. Libro verrà in se stessa a racchiudere ambedue l' ipotesi della direzione delle forze, come poco fa divisate. Nel capo presente la prima sarà maneggiata, e nel seguente la seconda, conforme occorrerà di vedere.

Per procedere frattanto con tutta la chiarezza, affinchè possansi evitare gli equivoci, per li varj nomi, che le potenze, da' varj Autori hanno avuti, quelle tali, che nel presente Libro dovranno aver luogo, saranno definite in quel senso, che da me in particolare s' intende. Avvertendo, che per quanto riguarda alla forza Centrale, e Respingente, riterranno elleno l'intelligenza medesima del libro 1. num. 115. e 116. definite, cioè che la prima attrae, e la seconda respinge il grave dal comun Centro.

DEFINIZIONE I.

451. *Forza Centripeta si nominerà quella, che ha la sua tendenza al centro del Circolo combaciante la curva.*

DEFINIZIONE II.

452. *La forza Centrifuga sarà quella potenza, che in virtù della quale, il grave si scosta dal centro del predetto circolo osculante la curva, per una direzione perpendicolare alla curva stessa.*

DEFINIZIONE III.

453. *Forza tangenziale si chiamerà quella potenza, in vigor della quale, il mobile tiene la sua direzione per la tangente alla curva.*

SCOLIO I.

454. Quest' ultima predetta forza tangenziale, secondo il metodo volgare, e più antico, gli Autori l' hanno adoprata ne' Curvilinei in quella guisa, che ne' rettilinei, cioè nel tempo, o nello spazio moltiplicandola. E ragion vuole, che talmente si pratichi, posciachè la medesima ritiene la stessa direzione del moto per le Curve descritto, come per appunto ne' rettilinei della forza motrice egli avviene, da quel, che nel trattare il moto della Cicloide, fu rispetto alla tangenziale suddetta osservato. E questa senza dubbio è valevole per lo scioglimento di tutte le quistioni meccaniche, come in realtà giustamente le leggi tutte de' movimenti deduconsi, valendosi della medesima; però forse sarà una potenza, che nella sola mente, e concetto degli Uomini, e non in natura avrà l' esistenza: ed il metodo giusto ella rende, in quanto che per sostituzion della vera forza s' adopra.

Nel maneggiarsi da me i presenti curvilinei nel voto, non avrà questa alcun uso, avvegnachè mi prevarrò dell' altro più moderno metodo, dal Bernoulli primieramente indiretto, e dal Padre Riccati, delle azioni appellato. Questo ei consiste nell' assumer la forza centrale applicata soltanto in quel tale spazio, per cui il projetto dal piano, o Centro delle forze si dilunga, o s' approssima; cioè a dire, che lo spazio non sarà quel-

lo

lo ſteſſo ſpazio di curva , per cui il mobile ſi dirige. e nel quale altronde la ſola tangenziale havvi luogo, Ho detto pure , ch' in quello ſpazio ſoltanto la centrale ſi applica, per indicare, che queſta potenza non può a ſimilitudine dell' altra , nel tempo eziandio moltiplicarſi, poſciachè per queſto non può ella valere, conforme egli è ſtato da altri chiaramente dimoſtrato.

S C O L I O II.

455. L' oggetto delle ricerche de' preſenti moti curvilinei liberi verte ſopra di queſto, che data la Curva dal projetto deſcritta , e la direzione verſo dove le forze centrali rivolte ſono, cercar ſi deve il valore delle forze medeſime; e quindi queſte tali ricerche, Problemi diretti da' Meccanici ſoglionſi nominare. Dipoi per converſo, data la forza, ritrovare qual ſia la Curva dal grave deſcritta, ch' a contrario, i converſi ſi appellano. E ſiccome maneggiandoſi le quiſtioni direttamente, e velocità, e tempi unitamente ritrovanſi, così poi nelle inverſe, dall' aver date, e queſte, e quelli, la curva medeſimamente vien ritrovata. Per giugnere al fine di quanto quivi eſponeſi, per varie ſtrade ſonoſi incamminati gli Autori di queſte materie trattanti, col prendere a fiſſare una general formola, o eſpreſſione delle forze al centro dirette; e chi con la Sinteſi, e chi con l' Algebra l' hanno così veramente fiſſata. Il gran Newton primieramente ne' ſuoi principj di Matematica a tutti noti, una ne ritrovò, che formula delle forze centripete ivi l' appella; la quale, per dire il vero, di lume, e ſcorta è ſervita per tutti gli altri, che ſimil formula ritrovarono. Coll' Algebra dipoi molti in ſeguito han fatto lo ſteſſo; dal Varignone, dal Ber-

Bernoulli Giovanni, nelle Memorie dell'Accademia di Parigi, e negli Atti di Lipsia parimente, dal Moevre, dal Padre Grandi, dall' Ermanno nella Foronomia, dal Kellio, e dal Padre Riccati ultimamente con varj valori è parimente stata stabilita; da me pure, seguitandosi la forma, e metodo dal citato Padre Riccati praticato, simile espressione verrà a fissarsi, e di questa mi prevarrò, mentre non è priva anch' essa, a pari dell' altre, d'eleganza; e siccome in tutte viene ad avervi luogo il raggio dell'osculo del circolo combaciante la curva, di questo particolarmente, come correlativo al metodo, che terrò in ritrovar quella, in primo luogo verrò a determinarne il valore, siccome fa il citato Riccati egli pure, e nell' ipotesi stessa delle potenze, che ritengono fra loro parallelamente le direzioni, vale a dire, dove le curve per le quali il mobile cammina all' asse loro son riferite.

L E M M A.

Tav. 7. Fig. 6. *Determinare il raggio dell' osculo nelle Curve riferite all' asse.*

456. Abbiasi una curva AN di qualsisia specie, la quale all' asse HQ sia riferita; in un punto d' essa arbitrario, prendasi un archetto elementare BE, e ne' punti B, ed E le perpendicolari CB, CE si conducano, le quali col loro incontro nel punto C, pongasi assegnarne il centro del circolo combaciante. Da' punti medesimi si tirino i perpendicoli all'asse della curva, quali sieno BS, ed EL; si tagli in un luogo qualunque della BS, una quantità data $= b$, e sia BK; di poi dal punto di sezione perpendicolarmente alla BC, si tiri una retta KM, sarà questa per conseguenza all' archet-

to

to BE parallela, dunque sarà pure $BK = b = OE$. In oltre dal punto O si conduca nel raggio CE la perpendicolare OT, la quale taglierà la CB nel punto U: ciò posto, si denomini $CB = r$, $HS = x$, ed $SB = y$. Se il projetto s' accosti al pian delle forze, come succede nella fig. 1. della Tav. 8. la costruzione si è la stessa, se non che i segni negativi avran luogo. Quindi risulterà $BD = dx$, e $DE = \pm dy$. Si chiami di più $BM = p$, si avrà per le differenze, $MU = \pm dp$. Per la somiglianza de' triangoli EDB, KMB, si ha $ED : EB :: KM : KB$; e poichè il triangolo OMU è simile al triangolo CTU, o sia al triangolo CBE, starà pure $BE : MU :: CB : OM = KM$; o sia per egualità perturbata, $ED : MU :: CB : KB$; onde in termini analitici esprimendone le quantità, ne viene $\pm dy : \pm dp :: r : b$, e riducendo ad equazione, $r = \frac{b. \pm dy}{\pm dp} = \frac{bdy}{dp}$, espressione del raggio, che si propose a cercare.

COROLLARIO I.

457. Per aversi ch' il triangolo BED è simile all' altro BKM, starà eziandio $BM : BK :: BD : BE$, cioè $p : b :: dx : ds$, rappresentando ds l' elemento della curva; vale a dire $p = \frac{bdx}{ds}$; la quale espressione per la quantità p, nelle seguenti ricerche è necessario averla, atteso il frequente uso, che dovrà farsene. Ciò stabilito innanzi procederassi.

PRO-

PROBLEMA GENERALE.

Tav. 8. Fig. 2. e 3. *Ritrovare la formula, o espressione delle forze centrali con direzioni fra loro parallele, come pure delle velocità, e de' tempi, posto un mobile viaggiare per una curva qualsisia data, ch' all' asse venga riferita.*

458. Dal punto A della curva data si concepisca gettato il grave per la direzione AT, e con velocità ivi nota $= U$, e parimente con una data forza $= F$; perpendicolare alla curva, cioè alla tangente in tal predetto punto, si tiri una retta $AQ = P$, quantità essa pur nota egualmente; e condotta AB perpendicolare alla BK rappresentante l' asse della curva, sia la medesima AB eguale a qualunque costante, per esempio $= b$; dal punto B sopra l' AQ perpendicolarmente si conduca in oltre la BQ. Posto, ch' il grave dal punto A in D sia giunto, si denomini $BO = x$, e l' ordinata $OD = y$; tirata l' infinitamente vicina KE, e DM di poi all' asse parallela, ne verrà $OK = DM = dx$, ed $ME = \pm dy$; valendo il segno più per la fig. 2. e l' altro per la 3. posciachè l' ordinata per essa si diminuisce. L' archetto DE, seguendo il solito metodo, si nominerà $= ds$, ed il raggio del circolo combaciante in tal punto, come sopra si è fatto, che sia $CD = r$. Si seghi adesso $DL = AB = b$, e si tiri la LH al raggio DC perpendicolare, e DH sia quella tal quantità p, che nel Lemma venne assegnata. La forza del projetto, che nel punto D ritiene, si denomini al solito $= f$, e suppongasi esser la DP; dal punto P finalmente la perpendicolare PI sia condotta, conforme costa dal num. 445., e dalla definizione 1. la DI sarà la forza Centripeta. Ciò presupposto, per esser simili i triangoli DLH, DPI, si ha $b : f :: p : DI$,

o vo-

o vogliam dire $DI = \frac{fp}{b}$, che è l' espressione di cotal mentovata forza, e la quale più volte verrà occasion d'adoprare.

459. Siccome poi a questa Centripeta eguale esser deve la Centrifuga num. 443. la quale è num. 448. $f = \frac{mu^2}{r}$; dunque il valore di questa nel num. antecedente surrogando, verrà ad aversi $\frac{fp}{b} = \frac{mu^2}{r}$; e di più in luogo del raggio, ponendovi il determinato valore $\frac{bdy}{dp}$ num. 456., risulta in fine $\frac{fpdy}{dp} = mu^2$.

460. Passando avanti, il differenziale ME si è quell' elementare spazietto, per cui il projetto, che nella Curva cammina, si discosta, o s' accosta al piano delle forze BK, e perciò secondochè fu premesso allo Scolio num. 454. in esso la forza Centrale anderà moltiplicata, per aversi la legge delle velocità, già nella prima Parte fissata: onde avremo $DP \times EM = \mp mudu$; ed i termini algebraici ponendovi, $f \times \pm dy = \mp mudu$; il segno negativo alle velocità proposto, valendo allorchè si diminuiscono queste, per l'allontanamento del grave dal piano, o centro delle forze, e l' altro positivo a contrario.

461. Di tale equazione fissata fattone il rapporto con l' anzidetta al num. 459. $\frac{fpdy}{dp} = mu^2$, ei verrà $f \times \pm dy : \frac{fpdy}{dp} :: \mp mudu : mu^2$, cioè $\frac{dp}{p} = -$

du.

$\frac{du}{u}$. Integrando adeſſo, haſſi $lp + A = -lu$, e col ſuppoſto, ch' il projetto in A principio del moto ritrovisi, dove $u = U$, e $p = P$, ne viene per la coſtante, $lPU = -A$, e perciò $lpu = lPU$; o ſia finalmente $u = \frac{PU}{p}$: ed ecco intanto una formula generale, che la velocità verrà a ſomminiſtrarci nell' ipoteſi particolari, che ſupporrannoſi, qualora direttamente i problemi ſi riſolveranno; come altresì, trattando gli inverſi, da queſta ne ſuccederà la ſoluzione, conforme dagli eſempj occorrerà di vedere.

462. In oltre è ſempre vero, ch' il tempo ſta nella ragion diretta dello ſpazio, e nell' inverſa della velocità; cioè perchè lo ſpazio ſcorſo ſi è adeſſo il curvilineo $DE = ds$, avremo $dt = \frac{ds}{u}$; in luogo poi della velocità, quella del num. antecedente ſoſtituita, ne viene $dt = \frac{pds}{PU}$; di più in vece di p il ſuo aſſegnato valore num. 457. ſoſtituito, avraſſi $dt = \frac{bdx}{PU}$; e perciò coll' integrare, $t = \frac{bx}{PU}$, perchè la coſtante viene $= o$; ed ed ecco l' altra generale eſpreſſione per i tempi, da valerſene come ſopra fu detto delle velocità.

463. Reſta da determinarſi la formula delle forze, la quale facilmente s' ottiene così. Si prenda l' eſpreſſione del num. 459. $\frac{fpdy}{dp} = mu^2$, ed in luogo delle

le velocità ſi mettano quelle al num. 461. già eſpreſſe, e che ſono $u^2 = \frac{P^2 U^2}{p^2}$, ſi avrà $f\,dy = \frac{mU^2 P^2 dp}{p^3}$; che è in punto quella formula generale delle forze centrali preſa a ſtabilire, la quale per ogni caſo di ſoluzion di Problemi ſarà adoprata, da quel, ch' in breve ſarà fatto apertamente vedere.

COROLLARIO I.

464. Supponendo poi, che verſo il dritto cammino delle potenze, ch' il corpo a viaggiar per la curva neceſſitano, non ſia la Curva ſteſſa concava, ſiccome ſi è ſuppoſto nell' antecedente Problema, ma bensì conveſſa in ambedue i caſi, e di ſalire, e di ſcendere; nel primo fig. 4. Da A verſo D ſcorrendo il projetto, creſcendo OD per la differenza $ME = dy$, ſcema però $DT = p$, per la differenza $TU = -dp$; onde per non eſſere ambedue tali differenze affette dal ſegno ſteſſo, la formula delle forze, dove tali differenze entrano, negativa dovrà divenire. Nella fig. 5. eziandio, dal punto A verſo D trapaſſando il grave, negativa viene $DM = -dy$, e poſitiva altresì $TU = dp$; e perciò come nell' altro caſo negativa la medeſima eſpreſſion delle forze; cioè $-f\,dy = \frac{mU^2 P^2\,dp}{p^3}$, che ſarà l'altra per lo conveſſo delle curve. Onde tal nozione ci iſtruiſce, che qualora ritroveraſſi che la forza col ſegno negativo viene affetta, deveſi quella tal curva deſcrivere con forze, che la direzione loro venga diretta a queſta curva per lo conveſſo. Tav. 8. Fig. 4. e 5.

Da' precedenti ſtabilimenti per tanto ſi ricaverà il

 me-

metodo per le soluzioni di tutte quante le quistioni, che ne' moti curvilinei liberi posson proporsi, tanto riguardo a quelle, che dirette, quanto a quelle, che converse, o inverse si dicono. Dalle prime si darà adesso principio, consistenti nell' aver data la Curva dal projetto descritta, per poterne da ciò ricavare, e forze centrali, e velocità, e tempi.

ESEMPIO I.

Tav. 9. Fig. 1. 465. La Curva data sia la parabola Apolloniana ADE, e nel punto D giunto pongasi il grave, che siasi dal punto A partito. Il vertice della curva fingasi in E, potendosi sempre praticare la costruzione del Problema generale, cioè il triangolo ABQ, con il resto delle quantità, sia pertanto $BO = x$, ed $OD = y$; essendo data la BS, ed il vertice, si chiamerà perciò $EK = a$; e siccome dato è parimente il punto B, dunque è data la BK, la quale sia $= c$, il parametro della curva sia $= q$, sicchè $OK = DM = c - x$, ed $ME = a - y$. E così l' equazione verrà $qa - qy = cc - 2cx + xx$; differenziata, risulta $\frac{q\,dy}{2c - 2x} = dx$.

Sovvengasi adesso ch' in ogni curva è l' elemento suo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e surrogandovi in luogo di dx^2 quel valore, che ci somministra l' equazion della curva differenziata, hassi $ds = \frac{dy}{2c - 2x} \sqrt{4 \times \overline{c - x}^2 + q^2}$.

Se ora l' equazione medesima differenziata già sopra, per questa dividasi, ed in oltre il valore del quadrato $\overline{c - x}^2$ si surroghi, si avrà $\frac{dx}{ds} = \frac{q}{\sqrt{4qa - 4qy + q^2}}$.

Si

Si sa altronde num.457. che $\frac{b\,dx}{ds} = p$, perlochè ponendovi tal valore, viene $\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{4a - 4y + q}} = p$; qui finalmente differenziando, e facendo quel che deesi, si ha $\frac{2\,dy}{b^2 q} = \frac{dp}{p^3}$; dove si scorge, che a quantità, ch' hanno luogo nella formula generale $f\,dy = \frac{m\,U^2 P^2\,dp}{p^3}$ viensi ad esser ridotta, e perciò sostituendole, risulta $f = \frac{2\,m\,U^2 P^2}{b^2 q}$ la forza cercata, espressa in quantità costanti; verità fin dal Galileo confermata, posciachè per converso stabilì, che stando la gravità costante, e nel voto faccendosi il movimento, un corpo gettato, niun' altra Curva descritta avrebbe, che la Parabola.

466. Si ritroveranno facilmente le velocità pure dall' espressione generale num. 461. $u = \frac{PU}{p}$; poichè in vece di p il suo ricordato valore ponendovi, saranno $u = \frac{PU\,ds}{b\,dx}$; ma $ds = dx\sqrt{\frac{q + 4a - 4y}{q}}$, ricavato dall' equazione, e perciò $u = \frac{PU}{b}\sqrt{\frac{q + 4a - 4y}{q}}$.

467. Per lo spazietto elementare di curva è fuor di dubbio, che la legge stessa de' tempi nel rettilineo determinata, vale egualmente; onde per questo tale predetto spazio, inteso quì pure essere ds, avremo pertanto $dt = \frac{ds}{u}$; e perchè num. antecedente il valore di ds, e quello delle velocità furon trovati, dunque col surro-

surrogarli, daranno che $dt = \frac{bdx\sqrt{q+4a-4y}}{PU\sqrt{q+4a-4y}} = \frac{bdx}{PU}$: e giacchè quando $t=o$, è pure $x=o$, così integrando, la costante è pure $=o$, laonde avremo $t = \frac{bx}{PU}$; e siccome le costanti possonsi trascurare, quindi il tempo sarà come $BO = x$; vale a dire, come al Problema generale fu ritrovato, corrispondente sempre all' ascissa.

COROLLARIO I.

468. Quando nel punto E, vertice della curva sarà giunto, diviene $y=a$, e perciò la sopra esposta equazione delle celerità riesce $u = \frac{PU}{b}$. O pure altrimenti, per essere $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e così venendo $ds = dx$, atteso che $dy = o$, nella espressione $u = \frac{PUds}{bdx}$, num. 466. surrogando, deducesi $u = \frac{PU}{b}$ similmente.

COROLLARIO II.

469. Vien pure in tal punto $x=c$, e perciò $t=c$, vale a dire, costante il tempo, e talmente riescir deve, poichè segue, come si è detto la ragione della retta BO.

ESEM.

E S E M P I O II.

470. La Curva, che per data vien presa, sia il Circolo AEH, il di cui diametro sopra la KH se ne cada, il centro d' esso in C, ed il raggio $KC = a$. Facciasi sempre $BF = x$, e così pure $Fd = y$; in oltre, se sia la distanza $BC = c$, sarà poi $FC = c - x$, ed $FK = a - c + x$, come ancora $HF = a + c - x$. Per lo che l' equazion di tal curva con le nominate quantità, vien questa $aa - cc + 2cx - xx = yy$, e differenziandola, $dx = \frac{ydy}{c-x}$; l'operazione da farsi sarà come la precedente, cioè divisi ambedue i membri dell' equazione per l'archetto di curva, ne viene $\frac{dx}{ds} = \frac{ydy}{ds.\overline{c-x}}$, e perchè si ricava, che $ds = \frac{dy}{c-x}\sqrt{\overline{c-x}^2 + y^2}$; surrogando questo stesso valore, e gli altri necessarj, che dall' equazione si hanno, risulta $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$; ed essendo inoltre num. 457. $\frac{dx}{ds} = \frac{p}{b}$, ponendovi anche questo, avremo $\frac{ap}{b} = y$, e per le differenze, $\frac{adp}{b} = dy$; sostituendo per tanto il ritrovato valore di dy nella generale espressione delle potenze num. 463. eccone le forze $f = \frac{mU^2 P^2 b}{ap^3}$, e poichè $p^3 = \frac{y^3 b^3}{a^3}$, finalmente avremo $f = \frac{1}{y^3}$, trascurate le costanti, perchè la ragion, che cer- Tav. 9. Fig. 2.

cercasi delle forze si è quella, che aver deve il rapporto con l' incognite solamente.

471. In altra più breve forma si può avere la predetta ragione delle potenze nel circolo, quale ella è così; siccome costa dal num. 456. che per lo raggio osculatore si ha $r = \frac{b\,dy}{dp}$, e nella curva, che si tratta viene egli ad esser sempre costante, il quale fu preso $= a$, e perciò $a = \frac{b\,dy}{dp}$; facendo come poco anzi, questo tal valore, e quello di p^3 surrogato, vien come sopra la forza $f = \frac{1}{y^3}$; vale a dire al cubo delle distanze dal piano reciprocamente proporzionale, o pure al cubo dell' ordinata nel circolo presente dato.

472. La velocità, dal valore di $p = \frac{b\,dx}{ds}$ sostituito nell' espressione $u = \frac{PU}{p}$, viene ad aversi tale $u = \frac{PU\,ds}{b\,dx}$; e posciachè si ha pure $ds = \frac{dx}{y}\sqrt{y^2 + \overline{c - x}^2}$, ed ancora abbiamo il valore dell' y^2 dall' equazione, onde tutti questi respettivi valori surrogando, risulta $u = \frac{PUa}{by}$, o vogliam dire, la medesima in ragione inversa dell' ordinata.

473. Relativamente poi al tempo impiegato, perchè è $dt = \frac{ds}{u}$, e l' uno, e l' altro valore surrogando, cioè di ds, e della velocità u già determinata, vie-

viene $dt = \frac{b\,dx}{P \cdot U}$, cioè $t = \frac{bx}{PU}$; ficchè fempre confermafi, che la ragion de' tempi in ogni ipotefi fegue la ragion dell' afciffa x.

COROLLARIO I.

474. Nella fommità della periferia, cioè in E, arrivato il projetto, la proporzione num. 470. ritrovata $p = \frac{by}{a}$, poichè ivi $y = a$, convertefi in $p = b = P$: e foftituendo quefti equivalenti valori nella ftabilita formula $f = \frac{m\,U^2\,P^2\,b}{a\,p^3}$, viene $f = \frac{m\,U^2}{a}$: cioè la forza Centrale divien la Centripeta, eguale alla Centrifuga, nel circolo determinata num. 448. effendo quì il raggio $a = r$; dovendo così fuccedere, poichè in tal punto al centro d' effo circolo le forze fono dirette, il che della Centripeta addivien giuftamente.

475. Le velocità poi diverrebbero $u = U$, cioè coftanti, come farebbero nel principio del moto; ed il tempo impiegato fino a tal punto, effendo ivi $x = c$, verrebbe $t = \frac{c}{U}$.

ESEMPIO III.

476. L' Iperbola AEL equilatera abbiafi per la curva data, col centro C defcritta, diametro traverfo $= 2a$, e conjugato $= 2c$; facendo le indeterminate Tav. 9. Fig. 3.

$BF=x$, ed $FD=y$, come sopra, e BS, perchè data $=n$, come altresì $CS=m$, di più $CH=z$, ed $HD=t$ sia l'ordinata; onde ne viene l'equazione $t^2=zz-aa$, e poi $tdt=zdz$; si ha parimente $ds=\sqrt{dt^2+dz^2}$, cioè $ds=\frac{dt}{z}\sqrt{2zz-aa}$, col sostituirsi i valori respettivi, dall'equazione prestatici; ma è pure $t=n-x$, e perciò $dt=-dx$. Sicchè dunque $\frac{-z}{\sqrt{2zz-aa}}=\frac{dx}{ds}$, e perchè $p=\frac{bdx}{ds}$, facendo la sostituzione, ne risulta $2zz-aa=\frac{bbzz}{pp}$, come eziandio $dz=-\frac{b^2zdp}{2p^3-b^2p}$. Giacchè poi $CS=m=z+y$, e perciò col differenziare, $dz=-dy$, e quindi $dy=\frac{b^2zdp}{2p^3-b^2p}$; e così poi nella formula generale num.463. ponendovi in luogo di dy il suo equivalente valore, se ne ricava $\frac{fzb^2}{2pp-bb}=\frac{mU^2P^2}{pp}$; e perchè $pp=\frac{bbzz}{2zz-aa}$, con di più ancora $z=m-y=ND$; laonde finalmente non curando le costanti, viene $f=-\frac{1}{m-y^3}$: cioè la forza cercata si è la negativa, volendo dire, che l'Iperbola con le forze dirette al convesso di essa si descrive, ed è al cubo di ND proporzionale.

247.

477. Parimente viene $u = \frac{PUds}{bdx}$, avendovi sostituito il noto valore di p; e se di poi l'altro di ds, già determinato dall' antecedente numero, riesce $u = -\frac{PU}{bz}\sqrt{2zz - aa}$, e prendendo i valori di z, verrà $u = \frac{-PU}{b}\sqrt{\frac{2\times\overline{m-y}^2 - aa}{m-y}}$; o pure in vece di questi surrogandovi quelli dell'altra incognita, posciachè $zz = tt + aa$, e $t = n - x$, sarebbe ridotta a questa $u = \frac{-PU}{b}\frac{\sqrt{aa + 2.\overline{n-x}^2}}{\sqrt{aa + \overline{n-x}^2}}$.

478. Il tempo poi viene esso pure, surrogandovi in $dt = \frac{ds}{u}$ il valore dell' archetto ds, e delle ritrovate velocità, $dt = \frac{bdx}{PU}$, o sia $t = \frac{bx}{PU}$, sempre in quella espressione, che fu già per lo innanzi accennata.

S C O L I O.

479. Al converso del precedente Problema si farà adesso passaggio, e siccome in quello dalla Curva, che data venne, ritrovate le forze centrali, le velocità, ed i tempi ne furono, così a contrario assegnate le forze, si anderà ritrovando al presente la Curva, in vigor di queste descritta. Consecutivamente poi a parte, dopo l' accennata soluzione, gli altri inversi delle date velocità, e tempi egualmente saran maneggiati.

PROBLEMA GENERALE.

Tav. 8. Fig. 2. *Date comunque le forze, fra loro tendenti al piano di esse con direzioni parallele, ritrovare la curva, che dal mobile si descrive.*

480. S' assuma la già fissata espression generale $f\,dy = \frac{m\,U^2 P^2 dp}{p^3}$, coll' integrarla si ha $f\,y = -\frac{m\,U^2 P^2}{2p^2} + A$; ed in A supposto il projetto, dove $y = b$, e $p = P$, ed $F = f$, secondo la costruzione eseguita al num. 458. ne risulterà per la costante, $A = F\,b + \frac{mU^2}{2}$; ora poi sostituendo, $fy - F\,b = \frac{m\,U^2}{2} - \frac{m\,U^2 P^2}{2p^2}$. Per render più spedita l' equazione, fa d'uopo riflettere, che quella velocità assegnata nel principio del moto $= U$, venga prodotta dalla forza costante $= F$, per un cognito spazio $= S$; e perciò a norma de' noti canoni, fattane la proporzione, sarà $2\,F\,S = m\,U^2$, onde tale equivalente valore sostituito eziandio, sarà ridotta così, $p = \frac{P\sqrt{F\,S}}{\sqrt{F\,b - fy + F\,S}}$; e poichè $p = \frac{b\,dx}{ds}$, quindi surrogando ancora, viene $\frac{P\sqrt{FS}}{\sqrt{Fb - fy + FS}} = \frac{b\,dx}{ds} = \frac{b\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; la quale maneggiata, come devesi, ella verrà ridotta nella seguente, $dx =$

$P\sqrt{}$

$\frac{P\sqrt{FS}.dy}{\sqrt{Fb^3 - P^2FS + Fb^2S - fb^2y}}$; e col porre, che sia $b^2 - P^2 = H^2$ per brevità, finalmente avremo $dx = \frac{P\sqrt{FS} \times dy}{\sqrt{Fb^3 + FSH^2 - fb^2y}}$; ed eccoci così pervenuti ad una equazione differenziale, in cui le indeterminate sonosi separate, e perciò costruibile per aversi la curva cercata, e quella in ispecie, che risulterà dall' ipotesi, che verrà presa dalla ragion delle forze f.

481. Per facilitare l' esecuzione, si prosegua ad integrar la medesima, onde $A + x = - \frac{2P\sqrt{FS}}{b^2f} \times \sqrt{Fb^3 + FSH^2 - fb^2y}$, e siccome quando $x = o$, diviene anche $F = f$, ed $y = b$, e perciò la costante $A = - \frac{2PSH}{b^2}$, per lo che sostituendola, $x = \frac{2PSH}{b^2} - \frac{2P\sqrt{FS}}{b^2f} \times \sqrt{Fb^3 + FSH^2 - fb^2y}$; resta adesso da vedere per gli esempj, come in diverse ipotesi delle date forze ne risultino le curve, che cercansi

ESEMPIO I.

482. Facciasi il caso della forza sempre costante; vale a dire, che essendo F quella data nel punto primo di projezione, continui dipoi esser sempre uniforme, cioè $F = f$; sostituendo adunque nella precedente generale espressione, si ridurrà egli che $x - \frac{2PSH}{b^2} =$

$-2P$

$\frac{-2P\sqrt{FS}}{b^2F} \times \sqrt{Fb^3 + FSH^2 - Fb^2y} = -\frac{2P}{b^2} \times$

$\sqrt{b^3S + S^2H^2 - Sb^2y}$, e quadrandosi, $\overline{x - \frac{2PSH}{b^2}}^2 =$

$\frac{b^3S + S^2H^2 - b^2Sy}{b^2} \times \frac{4P^2}{b^2}$; per rendersi più sbrigata, facciasi che $\frac{b^3 + SH^2}{b^2} = C$, e sarà allora

$\overline{\frac{2PSH}{b^2} - x}^2 = \frac{4P^2S}{b^2} \times \overline{C - y}$; la quale si è un'equazione alla Parabola, col parametro $= \frac{4P^2S}{b^2}$, e con l'ascissa $C - y$; onde provasi per converso, che da forze costanti affetto il grave, deve tal curva necessariamente descrivere; verità, come fu detto per lo innanzi dal Galileo dimostrata. Si procederà alla costruzione della medesima nella seguente forma.

Tav. 9. Fig. 4. Il punto, da dove se ne partì il projetto, in A essendo situato, e dove la costruzione fassi del triangolo nella maniera già fissata, da ivi pure si prolunghi AB fino in C, di maniera che AC venga ad essere quel tale spazio $= S$, al num. 480. surrogato; si prolunghi anche QA ad arbitrio, e di poi dal punto C si conduca a questa il perpendicolo CK, e dal punto K parimente si drizzi un'altra perpendicolare KL sopra a CA. Così avendosi costruito, se ne produce, che i triangoli ACK, ed ABQ sono simili, dunque si avrà l'analogia $b : P :: S : AK$, sicchè $AK = \frac{PS}{b}$; son simili parimente gli altri triangoli AKL, ed

ABQ;

ABQ; onde ſtarà $b : P :: \frac{SP}{b} : AL$, o ſia $AL = \frac{P^2 S}{b^2}$; e perciò quattro volte tal quantità verrà ad eſſere il Parametro della curva, cioè $\frac{4P^2 S}{b^2}$. In oltre, dal triangolo ABQ ſi ha, che $BQ = \sqrt{b^2 - P^2} = H$, num. citato, e perciò $b : H :: \frac{PS}{b} : KL$, vale a dire, $KL = \frac{PSH}{b^2}$; ſi prolunghi KL fino in O, con condizione, che LO doppia divenga della KL, ed avraſſi $\frac{2PSH}{b^2} = LO = NB$, e nella retta UN dovrà cadere l'aſſe della parabola; e perciò chiamata una qualſivoglia $BF = x$, verrà $DO = \frac{2PSH}{b^2} - x$, cioè l'applicata alla curva. Rimane da aſſegnarſi il vertice U, il quale così s' ottiene

Dalla ſomiglianza già detta de' triangoli ABQ, ed ACK, ſe ne ha $b : H :: S : CK$, e perciò $CK = \frac{HS}{b}$, come anche $b : H :: \frac{HS}{b} : CL = \frac{H^2 S}{b^2}$, e poichè ſi aſſunſe $b + \frac{H^2 S}{b^2} = C$, col prendere $TU = CL$, eſſendo $TN = b$, ſarà $NU = b + \frac{H^2 S}{b^2} = C$; ed eſſendo $FD = y$, avraſſi perciò $UO = C - y$; che ſarà l' aſciſſa della Parabola, ed U il ſuo vertice; e l' equazione $\overline{DO}^2 = \overline{\frac{2PSH}{b^2} - x}^2 = \frac{4P^2S}{b^2} \times UO$,

quel-

ſarà quella per appunto, che a coſtruire fu preſa con le quantità ſopra eſpoſte.

COROLLARIO I.

483. Non fa d'uopo da queſto converſo ritrovare velocità, e tempi, come nel diretto ſi pratica; e la ragione ſi è perchè ritrovata la curva dalle date forze, vien ridotto in tal caſo ad eſſer diretto il Problema, nel maneggiarſi il quale ſi è veduto, come tali affezioni ſi poſſano ottenere.

ESEMPIO II.

484. Si pongano le potenze proporzionali al quadrato reciprocamente preſo delle lontananze dal piano dalle forze, cioè $F : f :: y^2 : b^2$; Sicchè abbiaſi $f = \frac{Fb^2}{y^2}$ per la forza, che nel punto di Curva preſo, ritiene il projetto; quindi ponendola num. 481. riſulterà $x - \frac{2PSH}{b^2} = - \frac{2Py^{\frac{3}{2}}}{b^4} \sqrt{Sb^3y + S^2H^2y - Sb^4}$; quale è equazione da poterſi coſtruire, e per conſeguenza aſſegnata avremo la Curva cercata.

COROLLARIO I.

485. Fattaſi $x = o$, perchè in tal caſo $y = b$ anche diviene, ſe ne ricava dalla menzionata eſpreſſione che $2PSH - 2PSH = o$, vale a dire che nulla s' inferiſce di quel, che cercaſi; il che così effettivamente avvenir dee, poſciachè nel punto A ſtando il projetto,

in

in virtù della ſuppoſizione, non vi è aſſolutamente niun arco di Curva deſcritto.

Il metodo ſarà lo ſteſſo, quando che altre ipoteſi di valor delle forze ſuppor ſi voleſſero, e perciò ſempre in ogni caſo potraſſi avere la Curva, operando come ſopra; quindi per non dilungarci maggiormente, all' altro inverſo Problema trapaſſeremo, dove date le celerità del mobile, deeſi parimente ritrovar la Curva ch' egli deſcrive.

PROBLEMA III.

Date le velocità del projetto, aſſegnare la Curva dallo ſteſſo deſcritta. Tav. 8. Fig. 2.

486. Dal punto aſſegnato A gettato ſia il grave, con condizione, che deſcriva una Curva, non per anche adeſſo nota, e le velocità del medeſimo date ſieno in ragion ſudduplicata delle perpendicolari all' aſſe, o pur ſia al piano, dove parallele ſono le potenze tendenti; laonde vuole la condizione che ſtia $U : u :: \sqrt{b} : \sqrt{y}$. E perchè $u = \frac{PU}{p}$, ſiccome più volte ei fu ricordato, o vogliam dire $U : u :: p : P$, così per analogia eguale, avremo $p : P :: \sqrt{b} : \sqrt{y}$. Di più, eſſendo $p = \frac{b\,dx}{ds}$ num. 457. e così anche $p^2 = \frac{b^2 dx^2}{ds^2}$, quindi ſoſtituendo, ſarà $\frac{b^2 dx^2}{ds^2} : P^2 :: b : y$; cioè $b^2 y\,dx^2 = b P^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}$, o pure $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{\sqrt{by - P^2}}$, perciocchè integrando, $A + \frac{x}{P} = \frac{2}{b}\sqrt{by - P^2}$; ed avvegna-

gnachè sia $y=b$, quando $x=o$, e però $A=\frac{2}{b}\sqrt{bb-P^2}$

$=\frac{2H}{b}$ num. 480. Sicchè sostituendo, riesce $\overline{\frac{2HP}{b}+x}^2$

$=\frac{4P^2}{b^2}\times\overline{by-P^2}$; vale a dire, per quel, che si scorge, un' equazione esprimente la Parabola semplice; alla quale veramente esser dee con la supposizione delle assunte velocità, posciachè dalla Curva medesima, supposta nota, direttamente tali ritrovate elle furono, num. 466.

E S E M P I O I.

487. Prenderassi adesso nella ragione inversa de' perpendicoli all' asse, cioè $U:u::y:b$, e riflettendo, ed operando come nel precedente caso, per aversi sempre $u=\frac{UP}{p}$, e $p=\frac{bdx}{ds}$, s' avrà $\frac{bdx}{ds}:P::y:b$, cioè $\frac{b^2dx}{ds}=Py$; e ponendovi l' equivalente valore dell' archetto elementare ds, hassi $dx=\frac{Pydy}{\sqrt{b^4-P^2y^2}}$, e quindi coll' integrare, $A+x=\frac{-1}{P}\sqrt{b^4-P^2y^2}$, così che $A=\frac{-b}{P}\sqrt{b^2-P^2}=\frac{-bH}{P}$ sostituendo al solito, e però $\frac{bH}{P}-x=\frac{1}{P}\sqrt{b^4-P^2y^2}$, e quadran-

drando, ſe ne ha di poi $\frac{b^4 - b^2 H^2}{P^2} + \frac{2bHx}{P} - xx = yy$; la quale equazione è manifeſto appartenere al Circolo, ſiccome deveſi talmente ritrovare, per quanto appariſce dal diretto Problema ſciolto ſopra num. 472.

C O R O L L A R I O I.

488. Per ripruova della giuſta ſtabilita precedente eſpreſſione, riflettaſi così, ch' eſſendo $x = o$, vien parimente $y = b$, quindi ſoſtituendo queſti nominati valori, riſulterà $\sqrt{b^2 - P^2} = H$; cioè la medeſima quantità eguale a ſe ſteſſa, o pur $o = o$, quale è, come diceſi, equazione *identica*, e che quivi del moto ſeguito nulla ci inſegna, il che di fatti porta l' ipoteſi, mentre ſupponendo in *A* eſiſtere il corpo, non avvi in tal punto alcun movimento, eſſendo egli il punto di quiete, o principio del moto ſteſſo.

E S E M P I O II.

489. Sieno ora le velocità date quelle ſteſſe, che ritrovate direttamente furono num. 477. trattandoſi per Curva data l' Iperbola equilatera, cioè $u = \frac{-PU\sqrt{a^2 + 2.\overline{n-x}^2}}{b\sqrt{a^2 + \overline{n-x}^2}}$, quindi in luogo dell' u ſoſtituendo il ſuo conſueto valore $\frac{PU}{p}$, verrà ad averſi $-b = \frac{p\sqrt{a^2 + 2.\overline{n-x}^2}}{\sqrt{a^2 + \overline{n-x}^2}}$, e di nuovo l' altro della quantità p

mettendovi anche, sarà $-ds = \frac{dx\sqrt{aa+\overline{2.n-x}^2}}{\sqrt{aa+\overline{n-x}^2}}$, e finalmente il valore di ds pure sostituito, e fatte le necessarie operazioni, riducesi in $dy = \frac{ndx - xdx}{\sqrt{aa+nn-2nx+xx}}$. Integrandosi, se ne ricava $A-y=\sqrt{aa+nn-2nx+xx}$, ovvero $A^2-2Ay+yy-aa=nn-2nx+xx=tt$ num. 476. cioè l' equazione all' Iperbola, da quel, che vedesi, dove la costante A secondo il solito verrà facilmente a determinarsi.

Resta finalmente da vedersi il metodo, con cui dobbiam procedere alla soluzion dell' altro converso Problema, consistente nell' aversi per dati i tempi, e da' quali ricavar debbonsi le Curve descritte, il che brevemente con qualche esempio verrà eseguito.

PROBLEMA IV.

Tav. 9. Fig. 4. *Dato il tempo dal projetto impiegato nel descriver la Curva, ritrovare quale in ispecie questa esser debba.*

490. Lo scioglimento delle quistioni di tal fatta facilissimo riesce, operando così. Prendansi i tempi, per cagion d' esempio, alla ragion sudduplicata della retta UO, nella Curva AU da determinarsi quale ella sia. Già si osservò al num. 482. che $UO = C-y$, quindi per la condizione $t=\sqrt{C-y}$; e siccome $t=\frac{bx}{PU}$ num. 462. e perciò sostituendo, e quadrando, $xx=\frac{P^2U^2\times\overline{C-y}}{b^2}$; equazione alla Parabola.

CO-

COROLLARIO I.

491. Deducesi pur anche ch' il tempo nello scorrersi la Parabola è tale, quale fu supposto, poichè servendosi del consueto canone $dt = \frac{ds}{u}$, se porremo in vece della velocità, quella stessa, che dalla prefata Curva risulta num. 466. $u = \frac{PU\sqrt{q + 4a - 4y}}{b\sqrt{q}}$, se ne inferisce $dt = \frac{bds\sqrt{q}}{PU\sqrt{q + 4a - 4y}}$; e perchè l' equazion della medesima ci dà $\frac{qdy^2}{4a - y} = dx^2$; siccome dal num. 465. apparisce; quindi sarà $ds = \frac{dy\sqrt{4a - 4y + q}}{\sqrt{4a - 4y}}$, e $dt = \frac{b\sqrt{q}}{PU} \times \frac{dy}{\sqrt{4a - 4y}}$; Per lo che integrando; $A + t = \frac{-b\sqrt{q}}{PU} \times \sqrt{a - y}$; donde le costanti ch' hannovi luogo trascurate, risulterà il tempo accennato in quella forma, che per noto si è preso.

ESEMPIO I.

492. Pongasi il tempo dato espresso nella seguente equazione $t = \frac{b}{PU} \times \sqrt{aa - yy}$; perchè già sappiamo

mo dal canone generale, che $\frac{bx}{PU} = r$, col sostituire, verrà $\frac{bx}{PU} = \frac{b}{PU} \times \sqrt{aa - yy}$, cioè $xx = aa - yy$, ovvero $aa - xx = yy$, che è al Circolo col raggio $= a$, e l' ascissa presa dal centro di esso. Con simil metodo, e raziocinio ad altre infinite quistioni di tempo assegnato estender potrebbensi le teorie, e le quali con la facilità medesima assolute verrebbero, e perciò non meritando più lunga dimora le medesime, ad altro farem passaggio.

CAPITOLO III.

Delle potenze de' corpi al centro tendenti, in Ipotesi della direzione non parallela fra loro.

L'Altra sopraccennata supposizione, in cui le forze dirette al centro sempre si pongono essere, ma che mai paralellamente di queste avvenga, accaderà presentemente trattare. Ella è dessa una discussione, che motivo ha dato a' più eccellenti Matematici di dedurne mirabilissime, ed utili conseguenze, maggiormente per rapporto all' astronomiche teorie. Il metodo nella forma poco fa spiegato nel precedente Capo, riguardando l' esser elle ha tal punto paralelle tendenti, in questo pure sarà praticato, null' altro variando, che nell' adattare il raggio dell' Osculo, ed il ritrovamento della formula generale delle predette forze centrali alla supposizione presente, il che ora principiando dal primo, mi propongo di fare.

LEM-

L E M M A.

Nelle Curve riferite all' asse, e le forze dirette al centro non paralelle, trovare il raggio dell' Osculo. Tav. 9. Fig. 5.

493. Nella Curva *A E* prendansi due arbitrarj punti infinitamente prossimi fra di loro *D*, ed *E*, i quali per conseguenza racchiuderanno l' archetto elementare $DE = ds$; a questo si tirino a perpendicolo le due rette *CD*, e *CE*, le quali incontrandosi in *C*, determinino ivi il Centro del cerchio combaciante la Curva, il cui raggio *C D*, secondo il solito $= r$. In oltre, che *B* sia il centro, dove dirette sono le forze del projetto, ch' in essa Curva cammina; nominata $BD = y$, e condotta l' infinitamente prossima *B E*, se Centro *B* descrivasi l' archetto minimo di circolo *D G*, che chiameremo $= dx$, verrà perciò $GE = dy$. Dal punto *B* s' innalzi una perpendicolare *B M* al raggio *C D*, come pure un' altra con tal legge all' altro *C E*, qual sia ella *B T*, che segherà la *D C* nel punto *U*. Devesi quì intendere la costruzione medesima del num. 456., e perciò $DM = p$, come anche $MU = dp$, e tanto nella differenza dy, quanto in dp abbiasi il dovuto riguardo de' segni positivi, e negativi, secondo l' intelligenza del citato numero.

Avendosi simili i triangoli *DGE*, *BMD*, starà $EG : DE :: BM : BD$, ma perchè il triangolo *BMU* è parimente simile all' altro *CTU*, ovvero all' altro *CDE*, si avrà $DE : MU :: CD : BM$, o vogliam dire per analogia perturbata, $EG : MU :: CD : BD$, cioè analiticamente, $dy : dp :: r : y$, laonde $r = \frac{y\,dy}{dp}$, ch' è il raggio, che a determinar fu proposto.

CO-

COROLLARIO I.

494. Dalla ricordata somiglianza de' triangoli *DEG*, *DBM*, avrassi ancora che $DM : DB :: dx : ds$, cioè $p = \frac{y\,dx}{ds}$, espressione, che avrà molto uso in seguito, conforme vedremo.

PROBLEMA GENERALE.

Ritrovar la formula delle forze centrali, delle velocità, e del tempo, allorchè le forze medesime del projetto, che per una Curva all' asse riferita ne scorre, non han direzioni parallele fra loro, verso il centro tendenti.

495. Rimanendo fissa la costruzione del precedente Lemma, con di più che nella figura medesima costrutto sia il triangolo solito ABQ, siccome si fece al num. 458. e con le quantità stesse $AB = b$, $AQ = Q$; e la forza data nel principio di projezione $= F$, e la velocità $= U$; dal punto A pongasi ch' in un altro D sia pervenuto il projetto, dove abbia per forza $f = DK$, e sia quella ch' al Centro B vien diretta. Dal punto K condotta la perpendicolare KI al raggio CD, per le cose esposte al citato numero, DI verrà ad esser la forza Centripeta, per la fatta risoluzione.

Avendosi la similitudine de' triangoli DKI, DBM, sarà percio $DK : DB :: DI : DM$, cioè $DI = \frac{fp}{y}$, che è della predetta Centripeta l' espressione.

496. Questa eguagliar deesi con la Centrifuga, siccome sopra fu detto, laonde avremo $\frac{fp}{y} = \frac{mu^2}{r}$ num. 448.

448., dove ſoſtituendovi il valor del raggio oſculatore, nel Lemma antecedente ſtabilito, in quella d' $\frac{fpdy}{dp} = mu^2$ la ridurremo.

497. E' pure num. 460. $DK \times GE = -mudu$, ovvero $fdy = -mudu$, quindi dividendoſi la precedente per queſta, ne rieſce $\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u}$, e coll' integrare, $lp = -lu + A$: la coſtante riſulta $A = lPU$, conſiderandoſi l' $u = U$, e $p = P$ nel principio del moto; e però ſoſtituendo, $u = \frac{PU}{p}$; cioè $U : u :: p : P$, vale a dire le velocità reciprocamente come i perpendicoli alla Curva, che ſono p, e P, ſiccome coſta; Laonde avremo della ricordata celerità la generale equazione.

498. Tal ritrovato valore s' includa nell' eſpreſſione del num. 496. e ne naſcerà $fdy = \frac{mP^2U^2dp}{p^3}$, e ſarà deſſa la formula generale cercata; la quale ſimile all' altra di poco anzi ſtabilita rieſce, dove ponevanſi le forze ſteſſe eſſer paralellamente dirette fra loro.

La rifleſſione d' eſſer le forze rivolte al conveſſo della Curva, di già ſopra fatta, avrà preſentemente anche luogo; laonde per tal caſo verrà la formula del ſegno negativo affetta, cioè $-fdy = \frac{mU^2P^2dp}{p^3}$.

499. Il tempo impiegato a ſcorrer l'arco di Curva AD ottienſi dal conſueto canone $dt = \frac{DE}{u}$: e ſoſtituendo la velocità ſopraddetta, ne avremo $dt =$

 pds

$\frac{pds}{PU}$, e col surrogare l' equivalente dell' assunto $p = \frac{ydx}{ds}$, riesce $dt = \frac{ydx}{PU}$.

S C O L I O.

500. E' necessario quivi avvertire, che nella costruzione della figura havvi l' elemento dx, che entra come vedesi, nell' equazione del tempo, il quale non è egli differenziale d' arco alcuno variabile x, che da punto fisso abbia il suo principio, e perciò in due diverse maniere la suddetta differenza DG può ella calare, e crescere; la prima sarebbe in aumentarsi, o scemarsi in se stessa, siccome è chiaro, la seconda per la variazione, che pate l' ordinata y; perlochè non potrassi mai integrare, quando che non si pratichino i soliti ripieghi dell' Algebra, cioè per mezzo di sostituzioni. Laonde prendasi arbitrariamente un raggio di cerchio qualsisia $BS = c$, e col centro C descritto l' arco SH, dal punto fisso S vengano presi gli archi crescenti, o decrescenti, secondo la posizione della figura. Saranno pertanto simili i Settori BNH, e BDG, e quindi avrassi $y : DG :: c : NH$, il quale elemento $NH = dz$ potrà nominarsi; dunque $dx = \frac{ydz}{c}$, e sostituito dipoi nella sopraccitata espressione del tempo, risulterà $dt = \frac{y^2 dz}{cPU}$; ed ecco come si è pervenuto all' intento per potersi integrare, il che fa d' uopo averne memoria per i casi consimili, che in seguito incontrerannosi.

CO-

COROLLARIO I.

501. Hannosi i tempi, per quanto sopra num. 449. abbiam visto, espressi così $dt = \frac{1}{PU} \times y\,dx$; altresì poi è noto dall' Algebra, che l' Area, ovver superficie BAD ritiene per suo elemento il triangolo infinitesimo BDG, quale s' esprime con $\frac{y\,dx}{2}$, e che di più integrato, l' area suddetta ci porge. E però avremo $ABD = \frac{\int y\,dx}{2}$, ovvero $2ABD = \int y\,dx = t$, omesse le costanti, perchè non alterano, conforme hassi altrove praticato. Dunque il tempo ha la sua proporzionalità con lo spazio accennato ABD, e ciò sarà sempre vero d' ogni altro scorso tempo, tale intelligenza applicando. Questa si è la tanto celebre Proposizione stabilita dal Newton, relativamente a' tempi predetti, dal di cui stabilimento può dirsi, ch' ei n' inferisse quelle sì tante, ed ingegnose ricerche, alle presenti materie spettanti.

COROLLARIO II.

502. Costa che gli angoli stanno nella ragion diretta degli archi, e nell' inversa de' raggi, e per la relazione di tali quantità conseguentemente s' esprimono. Imperocchè volendosi l' angolo DBG, nominato per esempio $= dq$, avrebbesi $dq = \frac{dx}{y}$. Ed avvegnachè abbiamo avvertito num. 159. essere espressa in tal

 for-

forma la velocità angolare, ficchè volendola, verrà nell' esposta equazione compresa; e perchè inoltre $dx = \frac{y\,dz}{c}$ num.500. sostituendo, producesi $dq = \frac{dz}{c}$, quantità da potersi integrare, conforme vedesi.

T E O R E M A.

Tav. 9. Fig. 6. *Sien due eguali corpi verso del Centro C spinti, e che un d' essi rettamente, e l' altro per una qualsisia Curva si mova, con condizione ch' in punti egualmente dal centro distanti abbiano eguali velocità, proseguendo a moversi, in altri equidistanti punti manterranno le velocità sempre eguali.*

503. AC sia quella retta, per la quale uno di questi al centro C si vada accostando, ed AD la Curva in cui l' altro ei cammina. Il primo da A fino in B, ed il secondo da A fino in D supponga si stare, ambedue per le rette CB, e CD eguali, dal centro C equidistanti, ed in virtù della supposizione, sieno altresì di velocità eguali forniti. Conducasi a CD l' infinitamente prossima CK, e col far centro C descrivasi l' arco di cerchio KHb. Avvegnachè sieno eguali le lontananze CD, e CB, sarà conseguentemente il differenziale $HD = Bb$, con di più le forze centrali parimente eguali fra loro, per essere i gravi simili, ed in simili distanze, che per le due lineette stesse HD, e Bb possonsi rappresentare. In seguito, all' elemento di Curva DE si tiri dal punto H a perpendicolo la retta HI; ciò fatto è notissimo per le premesse, e spiegate teoriche, che la forza DH nelle due HI, e DI puossi risolvere, e perchè la sopraccitata perpendico-

co-

colare HI, ch' alla Centripeta equivale, con la Centrifuga fa equilibrio, e perciò nè diminuisce, nè accresce al mobile alcuna passione, l' altra sola DI si dovrà mettere in conto; perlochè questa medesima verrà ad esser la tangenziale stessa, e quindi varran per essa le regole tutte dal moto rettilineo precedente inferite. Dunque potrassi ammettere il noto canone $fdt = du$, ed in conseguenza la Bb per un caso, e la DE per l' altro esprimeranno gli scorsi tempi; e comecchè BI, e DI per le forze medesime si valutano, chiamando la velocità $= u$ allorchè in B, ed $= U$ quando in D ritrovasi il projetto, se ne produrrà pertanto, secondo le leggi note, $Bb \times Bb = du$, e $DI \times DE = dU$; per esser poi $DH = Bb$, surrogando rispetto al primo caso, hassi $\overline{DH}^2 = du$. Laonde $\overline{DH}^2 : DI \times DE :: du : dU$. Sono simili i triangoli HID, ed EHD, sicchè ne seguirà che $\overline{DH}^2 = DI \times DE$, e perciò nella proposta analogia sarà anche $du = DU$. Dunque gli accrescimenti delle velocità d' ambedue i gravi eguali sono, che è quel tanto proposto da dimostrare; e replicato il discorso, sarà ciò sempre vero per ogni altro punto qualunque

PROBLEMA II.

Movendosi più corpi attorno al comune Centro B, descrivendo Curve simili AE ed ae, ritrovare ne' punti analoghi H, ed b, qual ragione abbian fra loro le respettive forze, velocità, e tempi. Tav. 10 Fig. 1.

504. Un de' nominati projetti sia in H, e l' altro in b pervenuto, punti ambedue presi ad arbitrio, purchè però similmente descrivano col moto loro le Curve

ve accennate. Per cotali rispettivi punti, prendansi i raggi osculatori, un de' quali nel punto H si nomini $= R$, e l'altro in $b = r$. E' per se manifesto ch'avremo $BH : Bb :: R : r$, e preso a considerare un caso, da cui si fa luogo all'applicazion dell'altro, sarà $BH = R = \frac{y\,dy}{dp}$ num. 493. La formula generale $f\,dy = \frac{mU^2P^2dp}{p^3}$ è fuor di dubbio, che dee altresì aver luogo al fatto presente, laonde in questo valor del suddetto raggio ponendovi, ci dà $BH = \frac{mU^2P^2y}{fp^3}$; ma $p^2 = \frac{U^2P^2}{u^2}$ num. 497. e però egualmente sostituendo, riducesi che $BH = \frac{mu^2y}{fp}$. Abbiam pure $y = \frac{fp}{DI}$ num. 495. sicchè surrogando anche, ritrovasi finalmente $DI = \frac{muu}{BH}$.

Si noti ora che la quantità DI viene ad esser la forza Centripeta, num. citato, e la quale risolver puossi nella Centrale $DK = f$; sicchè $f = \frac{uu}{BH}$ diverrà, supposte le masse eguali. Se rispetto all'altro punto b si denomini la forza $= \varphi$, e la velocità $= c$, per la ragione medesima ne avremo $\varphi = \frac{cc}{Bb}$; le quali equazioni ridotte finalmente in analogia, starà $f : \varphi :: \frac{uu}{BH}$:

$\frac{cc}{Bb}$

$\frac{cc}{Bb}$, cioè a dire la respettiva forza de' gravi in H, e b, in ragion diretta del quadrato delle celerità, e nell' inversa delle respettive distanze BH, e Bb.

COROLLARIO I.

505. Per aversi $u = \frac{PU}{p}$ num. 497. vale a dire il valore delle velocità nel punto H, chiamata l'altra perpendicolare alla Curva nel cominciamento del moto al solito $= Q$, e di più la nota velocità $= C$, siccome nel punto b abbiasi il perpendicolo $= q'$, seguendo la costruzione stessa del Problema generale, ne verrà pertanto egualmente nel punto b, $c = \frac{CQ}{q}$, quindi starà

$$p : q :: P : Q$$
$$u : c :: U : C$$

sciolte, e risolute avendo le due accennate equazioni. In oltre tirata la BA, per aversi la somiglianza delle Curve, avremo $BA : Ba :: BH : Bb$, e per egualianza di ragione, in luogo delle velocità in H, ed b sostituendo le date in A, ed a, come parimente in vece di BH, e Bb surrogando BA, e Ba nell' analogia del num. antecedente sopraccitata delle forze, ne risulterà $f : \varphi :: \frac{U^2}{BA} : \frac{C^2}{Ba}$, che è lo stesso del dire, che le forze de' respettivi punti stanno in ragion diretta de' quadrati delle celerità cognite nel principio del moto A, ed a, e reciprocamente come le distanze date BA, e Ba, e perciò fra loro sempre in una proporzione costante. CO-

COROLLARIO II.

506. Avendosi pertanto $u = \sqrt{fBH}$, e $c = \sqrt{\varphi Bb}$ num. 504. cioè le celerità nella ragion suddupla composta della forza, e delle lontananze; siccome pure dal coroll. precedente, $u : c :: U : C$, onde facendone la proporzione, $u : c :: \sqrt{fBH} : \sqrt{\varphi Bb} :: U : C$, vale a dire ch' in ogni punto ritengon elle la ragione stessa, e costante.

COROLLARIO III.

507. Il tempo trapassato fino in H in un caso, fino in b nell' altro, per le cose omai note, l' avremo così $t = \frac{AH}{u}$, e $T = \frac{ab}{c}$, dove poi il valore delle sopraccitate celerità intromettendovi, ei ne viene $t = \frac{AH}{\sqrt{fBH}}$, e $T = \frac{ab}{\sqrt{\varphi Bb}}$; ma sta $AH : ab :: BA : Ba$, come altrimenti le forze respettive nel principio del moto, $F : \Phi :: f : \varphi$, e parimente $BH : Bb :: BA : Ba$, quindi per analogia eguale, $t = \frac{\sqrt{BA}}{\sqrt{F}}$, e $T = \frac{\sqrt{Ba}}{\sqrt{\Phi}}$, cioè i tempi respettivi eziandio fra loro in proporzione costante, e sono, come osservasi, nella ragion suddupla diretta delle distanze nel cominciamento del moto, e nell' inversa delle forze nel punto stesso.

SCO-

S C O L I O.

508. Rimanvi adesso dal fin quì stabilito, di procedere avanti nelle dovute ricerche del moto presentemente ad indagar preso, che dalle potenze al centro tendenti vien generato. Non istimo necessario l' avvertire che varie Curve descritte circa a tal punto esser possono, sì per la posizione diversa, e direzione di forze, poichè resta ciò per se evidentissimo. Secondo il metodo pertanto del Capo precedente, verranno le quistioni parimente disposte, e ordinate, vale a dire che primieramente dalle date, e note Curve in ispecie, le forze, e le altre passioni tutte saranno determinate, direttamente cioè; quindi per converso eziandio, in secondo luogo assumerannosi per date le altre affezioni. Perlochè dagli esempj del primo caso, o sia dalle quistioni dirette, assumendo data la Curva, acciocchè e forze, e velocità deducansi, daremo principio.

E S E M P I O I.

509. Debbansi rinvenire le forze, al centro tendenti del projetto, che in un dato Cerchio cammini. Porta il caso ch' il presato centro esista o in un punto della periferia, o fuori, o dentro di essa, e perciò tre particolari Ipotesi comprende il supposto, le quali partitamente esaminerannosi.

I P O T E S I I.

Cada dunque nella circonferenza, e sia in *B* il centro suddetto, tralasciando di costruire nella figura le specifiche quantità nel triangolo comprese, secondo l' in- Tav.10. Fig. 2.

telligenza del Problema generale, poſciachè ciò ſempre intendeſi allorchè il moto principia, ſi chiami $BD = y$, ponendoſi eſiſtere in D il grave già moſſo, punto ch' ad arbitrio verrà diſegnato; la forza ſia ſempre $= f$, ed il diametro della Curva $BE = 2a$: al citato punto di Curva ſia tirata la perpendicolare DC, la quale, per quanto è noto, nel Centro C del cerchio ſteſſo verrà a cadere. Dal ricordato centro B delle forze, perpendicolarmente a queſta, tirata la BN, ſuccederà che la retta DN ſia quella tal quantità $= p$, al num. 493. già eſpreſſa, e che altrimenti è quella, che al ritrovamento delle domande ei conduce. Ciò ſtabilito, ed in ſeguito ſempre così intendendoſi la coſtruzione, conducendo la retta DE all' eſtremità del Diametro, è chiaro che ſimili ſono i due triangoli BND, BDE, per gli angoli retti in N, e D, e per gli eguali CBD, BDN, onde il terzo eguale al terzo parimente; e però $BE : BD :: BD : DN$, o vogliam dire $2a : y :: y : p$, cioè $p = \frac{yy}{2a}$, come pure dipoi, $dp = \frac{y\,dy}{a}$; ſoſtituito il valore $p^3 = \frac{y^6}{8a^3}$ dalla preſente equazione dedotto, e l' altro della differenza fiſſato, nella ſolita formula num. 498. n' avremo $f = \frac{8ma^2U^2P^2}{y^5}$ per la forza ricercata, che è in ragione della quinta poteſtà della diſtanza dal centro reciprocamente aſſunta, omeſſe le quantità note, ſiccome è ſolito.

510. Si noti per maggior chiarezza ch' al num. 480. fu poſto eſſere $mU^2 = 2FS$, laonde intromettendovi tal valore pure anche, riſulta $f = \frac{16a^2P^2FS}{y^5}$; e perchè anco-

ancora le costanti nel principio del moto ritengono vicendevolmente l' una con l' altra la ragione medesima, che dell' altre succede in seguito, cioè come $p = \frac{yy}{2a}$, così ivi avremo $P = \frac{bb}{2a}$, e $P^2 = \frac{b^4}{4aa}$; Sicchè sostituendo pure, ci darà $f = \frac{4FSb^4}{y^5}$. Per lo raziocinio stesso, verrà egli $F = \frac{4FSb^4}{b^5}$ la forza iniziale, ovvero $b = 4S$; quindi finalmente tal valore di b surrogando eziandio in luogo di $4S$, viene a ridursi, che $f = \frac{Fb^5}{y^5}$; cioè $f : F :: \frac{1}{y^5} : \frac{1}{b^5}$, che è la ragione sopraddetta del quì avanti numero. Questo cotal tirato raziocinio in ogni altro fatto seguente inferir potrebbesi, che per brevità però sarà tralasciato.

511. Prendasi la generale espressione num. 497. $u = \frac{PU}{p}$, e quì l' equivalente valore della quantità p per innanzi fissata sostituita, ricaveremo per la velocità, $u = \frac{2aPU}{y^2}$; conciosiachè poi abbiamo $P = \frac{b^2}{2a}$, si ricaverà $u = \frac{b^2U}{y^2}$, cioè $U : u :: y^2 : b^2$, che sono le celerità in proporzione reciproca del quadrato della respettive distanze dal centro.

COROLLARIO I.

512. Dalla ricordata ragione $p = \frac{yy}{2a}$ scorgesi, ch' hassi il rapporto fra la distanza dal centro delle forze, e la perpendicolare ND, condotta alla Curva, ovve-

vero tirata la tangente DP, al perpendicolo BP; dalla cui relazione trovata ne' particolari casi, la soluzione delle quistioni viensi ad ottenere, col surrogare la medesima variabil quantità, e sua differenza eziandio.

COROLLARIO II.

513. Facil cosa è l' intendere, che se il projetto nell' altra parte dell'ambito circolare DHE ne scorresse, ed in H per esempio egli fosse, la notata perpendicolare, che alla Curva condur si dovrebbe, come HK, prolungata, anderebbe fino in K, acciocchè dal centro delle potenze B si potesse sopra della medesima drizzare il perpendicolo BK, e quindi l' operazione sarebbe la stessa per ricavarsi le consuete domande; all' altra ipotesi faremo adesso passaggio.

IPOTESI II.

Tav.10. Fig. 3. 514. Fuor del Circolo $HFDE$ cada ora il Centro delle forze B, restando come poco anzi $BD = y$, ed in D trovandosi il grave, conducasi di più $BK = b$, che passi per lo centro del circolo, e $BH = c$, il diametro $= 2a$, ed il restante pure come sopra si è fatto sia costruito. Dove la lontananza BD sega il cerchio in F, tirisi la FE, che pel centro essa pure trapassi, e dalla di cui estremità E condotta la ED, venga talmente a costruire il triangolo FED. Sappiamo da Euclide, che starà $BD : BK :: BH : BF$, cioè $y : b :: c : \frac{cb}{y} = BF$; dunque $DF = \frac{yy - cb}{y}$; di più per aversi simili i triangoli FDE, BND, avrem

vrem parimente $EF : FD :: BD : DN$, ovvero in caratteri dell'Algebra, $2a : \frac{yy-cb}{y} :: y : p$, e però $2ap = yy - cb$; con che siam giunti al ricercato, e sopra divisato rapporto. Laonde è $dp = \frac{ydy}{a}$, come anche $\frac{dp}{p^3} = \frac{8a^2ydy}{\overline{yy-cb}^3}$, e così sostituendo nella general formula delle forze, ricavasi $f = \frac{8a^2mU^2P^2}{} \times \frac{y}{\overline{yy-cb}^3}$.

515. E per le celerità altresì avremo, sostituendo come poco avanti si fece il valore della quantità p, $u = \frac{2aPU}{yy-cb}$.

COROLLARIO I.

516. Pervenuto nella sommità della periferia Q il projetto, diviene $BQ = y$, e $QC = p = a$, e perciò $2aa + cb = yy$; vale a dire, che nulla farà tanto la differenza delle distanze, quanto quella di p; onde è che producesi e forza, e celerità costante.

COROLLARIO II.

517. Quando che la prefata distanza dal Centro divenga in un punto della supposta Curva tangente, e verbigrazia sia in F, è manifesto che $BK \times BH = \overline{BF}^2$, cioè a dire ch' egli è $cb = yy$; quindi verrà la citata formula, $f = \frac{8a^2mU^2P^2y}{0} = \infty$, cioè di un

valo-

valore infinito. La stessa conclusione deducesi dal riflettere la natura della suddetta equazione $2ap = yy - cb$, mentre $cb = yy$, produce $p = o$, e perciò $fdy = \frac{mU^2P^2dp}{o} = \infty$, come si è detto.

COROLLARIO III.

518. Nella posizione stessa, che BF tangente divenga, ovvero, che è lo stesso, d'allorchè $p = o$, in tal caso la detta quantità p da positiva ch'ella era, trapasserà in negativa, siccome per le regole algebraiche si è noto; e però prolungata CF fino in M, e dal Centro B tirata a perpendicolo BM, avremo che $MF = p$, e le forze dirette saranno al Centro B, verso cui la Curva mostrerà il convesso. Quindi essendo $BC = c + a$, e $CM = a + p$, avrassi conseguentemente $\overline{BM}^2 = cc + 2ac - pp - 2ap$; come pure $\overline{BF}^2 = yy = cc + 2ac - 2ap$; e per esser di poi $2a + c = b$, riescirà altresì $cb - yy = 2ap$, e $-dp = \frac{ydy}{a}$, a segno che col sostituire i respettivi valori nella più volte ricordata formula, ne viene $f = -\frac{8ma^2U^2P^2y}{cb - yy^3}$; cioè $f = \frac{-y}{cb - yy^3}$, che sta la forza nella ragione medesima, dell' Ipotesi seconda, poco innanzi trattata.

519. La celerità parimente risulta $u = \frac{2aPU}{cb - yy}$, surrogando al solito.

IPO-

IPOTESI III.

520. Venga egli finalmente a cadere in B il centro predetto, nel Circolo HDK, la consueta costruzione restando, e denominazione di quantità, che nella prefata Ipotesi antecedente, dovrà esser $BC = a - c$, e $CN = a - p$; nel triangolo BNC, per l' angolo retto in N, star dee $\overline{BN}^2 = cc - 2ac + 2ap - pp$, e parimente $\overline{BD}^2 = yy = pp + \overline{BN}^2$, cioè sostituendo in luogo di $\overline{BN}^2$, $yy = cc - 2ac + 2ap$, donde col differenziare, $\frac{ydy}{a} = dp$, che finalmente ogni particolare valore della quantità p surrogato nella forza, ricavasi $f = \frac{8ma^3U^2P^2y}{yy + 2ac - cc}$; e giacchè $2a - c = b$, con di più che le costanti non abbianvi luogo, si è $f = \frac{y}{yy + cb}$, valore cercato. Tav.10. Fig. 4.

521. La velocità, facendo come sempre, riescirà $u = \frac{2aPU}{yy + cb}$.

ESEMPIO II.

522. Descriva il projetto la Curva data $CADH$, e la qual sia l' Ellisse, in cui il Centro delle potenze B, nel centro della figura stessa ritrovisi. Il punto A pongasi esser quello, da cui mosso si è il grave, e l' altro D quello ove ritrovasi, arbitrariamente determinato, e dove del citato grave voglionsi le forze. Seguendo il discorso del Problema generale, dovrà essere $AB = b$, al fatto Tav.10. Fig. 5.

fatto presente le veci facendo di semidiametro trasverso della Curva; sia inoltre $BD = y$, e la perpendicolare $ND = p$, e di più il semidiametro conjugato $= a$, e la BN fino in H prolungata $= z$. Per proprietà dell' assunta Curva si ha, che la somma de' quadrati de' semidiametri trasversi, e conjugati è sempre eguale, cioè $\overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{BD}^2$, ovvero $bb + aa = yy + zz$; similmente ha per natura, ch' i paralellogrammi circoscritti, o pure la metà loro de' semidiametri predetti è parimente eguale, ovvero $AB \times \frac{BC}{2} = DN \times \frac{BH}{2}$; ed in termini dell'analisi, $\frac{ab}{2} = \frac{pz}{2}$; e però sostituendo nell' equazione in vece di z, acciocchè abbiavi luogo la quantità p, da cui sciolta viene la quistione, avremo con ciò $bb + aa = yy + \frac{aabb}{pp}$; cioè sarà $p = \frac{ab}{\sqrt{aa + bb - yy}}$; dunque differenziando, viene $dp = \frac{abydy}{\overline{bb + aa - yy}^{\frac{3}{2}}}$, e di poi, $f = \frac{mU^2 P^2 y}{aabb}$ sostituendo le necessarie quantità; quale ella è la forza come le semplici distanze dal centro direttamente prese.

523. Sono poi $u = \frac{PU}{ba} \sqrt{aa + bb - yy} = z$ le celerità, col maneggiar l' equazioni secondo il solito.

ESEMPIO III.

Tav. 10. Fig. 6. 524. Nell' Iperbola equilatera, i di cui semidiame-

metri, e tutt' altro come nell' esempio antecedente resti, cioè centro in B, il grave in D, e la $DN = p$, si ha per sua passione, che la differenza della somma de' quadrati de' semidiametri è all' altra eguale, e perciò $\overline{BA}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BH}^2$, o pure $bb - aa = yy - zz$; e perchè come sopra, il triangolo $\frac{ba}{2} = \frac{pz}{2}$, quindi surrogando, $bb - aa = yy - \frac{bbaa}{pp}$, e $p = \frac{ba}{\sqrt{aa - bb + yy}}$, e così $\frac{dp}{p^3} = -\frac{ydy}{bbaa}$, ed $f = \frac{-mU^2P^2y}{bbaa}$, cioè la potenza come nell' esempio precedente nell' Ellissi, ma negativa, poichè nell' Iperbola, il Centro delle forze al convesso di essa rivolgesi.

E S E M P I O IV.

525. La Logaritmica spirale DAB scorra il protto, il quale al centro B, polo di essa sieno dirette le forze. Avvegnachè per la primaria sua affezione porti, che condotta la tangente DT sul punto D, luogo ove ponesi il grave, e di più $BD = y$, rimanga sempre costante l' angolo BDT, sarà vero altronde, che dato avrassi in ispecie l'altro angolo BDN dall' applicata predetta, e dalla perpendicolare DN formato. Quindi la ragione di BD a DN l' avremo sempre data. Pertanto stabilita essere quella della a ad un' altra, che sia c, verrà $a : c :: y : p$, e però $p = \frac{cy}{a}$, e $dp = \frac{cdy}{a}$, e così poi al solito sostituendo questi valori, rie- Tav. II. Fig. 1.

ſcirà per la forza cercata, $f = \frac{mU^2P^2a^2}{ccy^3}$, cioè ch' ha ella rapporto reciprocamente come il cubo delle lontananze dal centro.

526. E così poi anche la velocità $u = \frac{aPU}{cy}$, che è nella contraria ſemplice della diſtanza predetta.

E S E M P I O V.

Tav. II. Fig. 2. 527. Se la Curva ſia poi la Spirale iperbolica, che parimente il centro ſia B, come poco anzi, in cotal Curva ſi ha per proprietà che la ſottotangente BT ſi conſervi ovunque coſtante, e però facciaſi $= a$; ne avremo $yy = pp + \overline{BN}^2$. Per la ſomiglianza de' triangoli BDT, NBD, ſtarà $p : BN :: a : y$, e $BN = \frac{yp}{a}$: dunque queſto valore quì ſopra ſoſtituendo, ne verrà $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}} = p$, e la differenza poi, $dp = \frac{a^3dy}{yy+aa^{\frac{3}{2}}}$, ſiccome $\frac{dp}{p^3} = \frac{dy}{y^3}$, e però $f = mU^2P^2 \times \frac{1}{y^3}$; vale a dire la forza reciprocamente come il cubo delle diſtanze, ſimile all' antecedente eſempio.

528. E' la velocità $u = \frac{PU}{p} = \frac{PU\sqrt{aa+yy}}{ay}$, e giacchè la Curva ſuppoſta ci dà che $DT = \sqrt{aa+yy}$, quindi ridurraſsi in $u = \frac{PU}{a} \times \frac{DT}{y}$, cioè la veloci-

tà

tà soprannominata in ragione direttamente con la tangente, e con le semplici distanze reciprocamente.

S C O L I O.

529. Poichè le Curve dalla sezione del Cono generate, riguardansi come riferite ad un certo tal qual punto, che Foco delle medesime s' appella, in questo particolare aspetto pertanto sarà di mestieri considerarle presentemente; cioè esaminando qualmente le forze del projetto in esse scorrente, a tal ricordato punto abbian la loro direzione; tanto più che tale esame necessaria ella rendesi, in quanto che le inferite leggi, le più speciose elle sono rispetto a' movimenti, ch' alle nozioni, e teoriche astronomiche appartengono, circa alle quali, siccome è notissimo, ottengono frequentissimo uso. In tanto sarà d' uopo richiamarsi alla memoria loro i Lettori molte proprietà delle sezioni coniche, le quali noi come ad essi ben note supporremo, per non dilungarci maggiormente: e così seguendo il cominciato metodo, prenderò ad esaminare il moto curvilineo nel prefato aspetto, alle ricerche necessarie procedendo, distribuendole in varj Esempj, conforme segue.

E S E M P I O VI.

530. La Parabola AD col vertice A descritta, e parametro $= a$ scorra il projettò, ed il suo Fuoco in B sia quel tal punto, o Centro, dove la potenza è diretta. Tirisi la direttrice KS, e nel punto arbitrario D, in cui ritrovasi il grave, la tangente DQ conducasi, e di più perpendicolarmente alla direttrice predetta, la retta DS; dal fuoco inoltre condotta la consueta $BD = y$, Tav. II. Fig. 3.

 e DN,

e $DN=p$, chiamisi di poi $HD=x$, ed $AH=z$. Per l'angolo retto in K, avremo $\overline{BS}^2=\overline{BK}^2+\overline{KS}^2$, che per aversi pure dalla proprietà della Curva, $BK=\frac{a}{2}$, e $KS=HD=x$ per la costruzione, riescirà $BS=\sqrt{\frac{aa}{4}+xx}$; conciosiachè poi l'equazione ci dia $az=xx$, ed altresì $\frac{a}{4}+z=SD=BD=y$, quindi sarà $BS=\sqrt{ay}$. Ciò posto c' insegna la sezione del Cono, che per proprietà della tangente, il triangolo $DQB=DQS$, onde $BQ=QS$, e però la metà di BS, quale egli è la $BQ=DN=p=\sqrt{\frac{ay}{4}}$; donde eccoci al solito rapporto della quantità p pervenuti, il quale scioglie il quesito; dunque $dp=\frac{a\,dy}{8p}$, e sostituendo, come fin quì si è fatto, ne viene $f=\frac{2mU^2P^2}{a}\times\frac{1}{yy}$, cioè la forza reciprocamente come le distanze al quadrato elevate.

531. Prendendo $u=\frac{PU}{p}$, e quel valore di p sostituito, verrà $u=\frac{2PU}{\sqrt{a}}\times\frac{1}{\sqrt{y}}$, che sono le velocità in proporzione contraria suddupla delle distanze dal Foco.

ESEM-

ESEMPIO VII.

532. La Semiellisse ADK essendo la Curva, col semidiametro trasverso $AC=a$, e coll'altro conjugato $=b$, al di cui foco B tendano le forze, tirata alla tangente in D da ambedue i Fuochi la perpendicolare BT, e bt, è noto che per passione d'essa Curva, l'angolo TDB è eguale all'altro tDb; in oltre per aversi l'angoli in T, e t retti, starà $BD : bD :: BT : bt$, cioè $bD : bt :: BD : BT$; si ha parimente per natura della Curva, che $BT \times bt = bb$, ovvero egli sarà Tav. II. Fig. 4.

$bt : b :: b : BT$, dunque per esser quì sopra

$bD : bt :: BD : BT$, componendo ne avremo

$bt \times bD : b \times bt :: b \times BD : BT \times BT$, e coll'equazione, $\overline{BT}^2 = \frac{bb \times BD}{bD}$, e sostituendovi adesso il valore di $BD = y$, e quello di $bD = 2a - y$, riescirà $BT = DN = p = \frac{b\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}}$, differenziando, viene $pdp = \frac{abbdy}{\overline{2a-y}^2}$, e quindi i citati valori surrogando, hassi $f = \frac{amU^2P^2}{bb} \times \frac{1}{yy}$, vale a dire la forza centrale in ragion reciproca doppia della distanza dal Foco.

533. Sarà poi la velocità $u = \frac{PU\sqrt{2a-y}}{b\sqrt{y}}$, o sia, che è lo stesso, nella diretta suddupla della distanza dall'altro foco, e reciproca suddupla dell'altra dal centro.

ESEM-

ESEMPIO VIII.

Tav. II. Fig. 5. 534. L' oppoſta Iperbola ſia la Curva data, ſimilmente deſcritta con i ſemidiametri a, ed b, conforme dell' Elliſſi fu detto: in D ritrovandoſi il mobile, due caſi dar ſi poſſono riguardo alla direzione della potenza; ſarà il primo d' allorchè il fuoco B verſo il concavo, ed il ſecondo, quando che l' altro b verſo il conveſſo dell' Iperbola rivolto ei ſia; i quali per maggior chiarezza a parte ognun d' eſſi eſamineremo.

IPOTESI I.

Coſtruendo al ſolito, avremo $BD = y$, e $DN = p$; e condotta la tangente DT al punto D, ſuccederà come nell' Elliſſe, che i triangoli BDT, e bDt ſieno ſimili, come pure che $BT \times bt = bb$, e perciò ſempre avremo per vero, che $\overline{BT}^2 = \frac{bb \times BD}{bD}$; e giacchè la differenza delle rette da' fuochi alla Curva è ella eguale all' aſſe traſverſo, vale a dire $bD - BD = 2a$, cioè $bD = 2a + y$, ſoſtituendo come deeſi, viene ad averſi $BT = p = \frac{b\sqrt{y}}{\sqrt{2a+y}}$, ſicchè $pdp = \frac{abbdy}{2a+y}$: laonde $f = \frac{maU^2P^2}{bb} \times \frac{1}{yy}$, che ſono ſimilmente le forze come nell' Elliſſi. E la celerità altronde verrà $u = \frac{PU}{b} \times \frac{\sqrt{2a+y}}{\sqrt{y}}$.

CO-

COROLLARIO I.

535. La forza, ſiccome abbiam viſto ne' ſoprannominati caſi delle Curve coniche, ch' al fuoco d'eſſe veniva diretta, ſempre ſimile riſulta; come anche notato abbiamo ch' il ritrovamento della di lei ragione dipenda dal rapporto della quantità p con le diſtanze, e loro funzione, e però potrà ſtabilirſi un' equazione generale, la quale tutti i tre citati caſi ella comprenda, e che così s'eſprima $p = \frac{b\sqrt{y}}{\sqrt{2a \mp y}}$. Il ſegno negativo varrà per l' Elliſſi, il poſitivo per l' Iperbola; nell' Ipoteſi precedente; e ſe il fuoco B, e vertice A ſtabili e fiſſi rimangano, e l'altro foco all'infinito s'eſtenda; l' equazione alla parabola eſprimerà finalmente; poſciachè avendoſi $2app \mp ppy = bby$, ſe il fuoco in infinito ſen vada, parlando del terzo caſo, l' aſſe traſverſo eziandio $= 2a$ dovrà infinito divenire, onde nell' eſpoſta equazione cancellandoſi il termine ppy, perchè nulla diviene con l' altro paragonato, rieſce $p = \frac{b\sqrt{y}}{\sqrt{2a}}$, eſprimente la Parabola ſuddetta, num. 530.

IPOTESI II.

536. Al Foco b venga adunque ſecondariamente diretta la forza del projetto ſuppoſto in D, onde ſia $bD = y$, e $Dn = p$; poichè egli è ſempre vero che ſta $BD : bD :: BT : bt$, ſiccome altresì eziandio è $bt : b :: b : BT$, componendo, ricaveraſſi poi $\overline{bt}^2 = pp = \frac{bb \times bD}{BD}$, e comecchè $BD = y -$

$2a$,

$2a$, e perciò sarà $pp = \frac{bby}{y-2a}$, così poi prendendo le flussioni, $pdp = \frac{-abbdy}{\overline{y-2a}^2}$: donde come al solito operando, riducesi $-f = \frac{maU^2P^2}{bbyy}$, cioè la forza sempre in ogni caso reciprocamente come la seconda dignità delle distanze, ma quì negativa risultando, posciachè al convesso è diretta, come in fatti dee esser tale, per quanto che venne più volte antecedentemente notato. La velocità parimente ella è $u = \frac{PU\sqrt{y-2a}}{b\sqrt{y}}$.

PROBLEMA III.

Viaggi in una data Curva ADH il projetto, il quale a due diversi punti, dalla forza attratto sia con tal legge, che scorra la Curva accennata in egual tempo periodico, assegnare la proporzion delle forze, della velocità, e del tempo.

Tav. II. Fig. 6. 537. In D punto arbitrario assunto, pongasi trovarsi il mobile, e B uno, e l' altro b sieno i punti, ovvero centri predetti, che con le già espresse condizioni il medesimo grave a lor tirino. Essendo sempre costrutto nella forma solita, di maniera che $DN=p$, e $BD=y$, non v'ha dubbio, che l'espressione della potenza in B tendente, esser dovrà $fdy = \frac{mU^2P^2dp}{p^3}$, e quivi il valore del raggio dell' osculo $r = \frac{ydy}{dp}$ sostituen-

op

do, risulterà $f = \frac{mU^2P^2y}{rp^3}$. Posto ciò, se pongasi la celerità iniziale $= C$ d' allorchè nell' altro punto b spinto viene il projetto, e la solita corrispondente perpendicolare alla Curva $= Q$, siccome pure $bD = x$, sicchè poi $Dn = q$, e la forza in D di tal supposto $= \varphi$, per lo raziocinio, e ragioni medesime dovrà esser la formula, $\varphi = \frac{mC^2Q^2x}{rq^3}$, e perchè il raggio, e massa sono li stessi, posti in analogia i termini, avremo $f : \varphi :: \frac{U^2P^2y}{p^3} : \frac{C^2Q^2x}{q^3}$. Se il tempo del caso primo sia t, e dell' altro T, dal num. 501. hassi che $t = \frac{2ADB}{PU}$, e $T = \frac{2ABD}{CQ}$; ma per la condizione sono eguali, quindi $\frac{ADB}{PU} = \frac{ADB}{CQ}$, cioè $P^2U^2 = C^2Q^2$; laonde $f : \varphi :: \frac{y}{p^3} : \frac{x}{q^3}$. Tirinsi adesso le perpendicolari BS, e bK alla tangente in D, ed anche la paralella bO alla BD, saran per conseguenza simili i triangoli BSD, e bKO, onde è che starà $p : q :: y : bO$, e per egualità di proporzione, surrogando, $f : \varphi :: \frac{1}{yy} : \frac{x}{\overline{bO}^3} :: \overline{bO}^3 : xyy$; cioè la forza a' due predetti punti diretta, come il cubo della retta dal punto b alla tangente condotta, ed alla BD paralella, ed il quadrato della distanza dall' altro punto, nella distanza dell' altro multi-

plicato; quale ella è in punto quella ragione dal Newton ritrovata al coroll. II. Prop. VII. del Libro I.

538. Se per un caso hassi $u = \frac{PU}{p}$, siccome è omai noto, per l'altro parimente avremo $c = \frac{QC}{q}$, e posciachè, numero precedente, $QC = PU$, starà dunque $u : c :: \frac{1}{p} : \frac{1}{q} :: q : p :: bO : y$ num. citato. Sicchè la velocità respettiva come la retta bO, e la distanza y.

COROLLARIO I.

539. Col porre, ch' i tempi periodici eguali fra loro non fossero, avrebbesi $t : T :: \frac{2ABD}{PU} : \frac{2ABD}{CQ} :: QC : PU$; quindi tal valore nella sopra esposta ragione num. 537. ponendo, e quadrando, ne viene $f : \varphi :: \frac{T^2 \times y}{p^3} : \frac{t^2 \times u}{q^3} :: \frac{T^2}{y^2} : \frac{t^2 \times x}{\overline{bO}^2} :: T^2 \times \overline{bO}^2 : t^2 \times y^2 u$, attese le ragioni precedenti, cioè stanno le forze nella ragion sopraccitata, e nell' inversa duplicata de' tempi.

E le velocità, $u : c :: \frac{PU}{p} : \frac{QC}{q} :: q\,PU : p\,QC :: bO \times PU : y\,QC$.

SCO-

S C O L I O.

540. Da' diretti Problemi passeremo a' conversi, cioè prese per date le forze, ed il centro ove son elle dirette, gettato il projetto, dovrà ritrovarsi la Curva dal medesimo descritta. Per quella tal funzione della perpendicolare p, e per la distanza, e sue annesse quantità, venivasi, siccome abbiam veduto, ad ottener la soluzion de' quesiti, o sia che la proporzion delle potenze, e velocità nota risultava. Così parimente negli inversi, che ora farem per trattare, qualora giunti saremo ad aver ritrovata la relazione delle prefate quantità, conosceremo a qual Curva appartenga l' Ipotesi della forza assunta, e perciò da costruirsi la Curva stessa. E se in questi nominati conversi, verremo a contrario, quella tale espressione, che dalla Curva data inferivasi a ritrovare, credo che non caderavvi alcun dubbio, che la Curva cercata non debba esser quella stessa, che dalla ragione, o quantità predette fu generata, pertanto sia

P R O B L E M A   G E N E R A L E.

Data la forza del mobile, ed il centro B, a cui egli è diretta, ritrovar la Curva ADE, che dal grave, verso AT gettato, descrivesi. Tav. 12. Fig. 1.

541. Facilmente avremo la soluzion del Problema dall' equazione generale stabilita num. 498. $f dy = \frac{mU^2 P^2 dp}{p^3}$ coll' integrarla, onde ne venga $\int f dy = \frac{mU^2 P^2}{-2p^2} + A$; per la costruzione nota succede, che fatta $y = b$, cioè nel principio del moto, venga pure

 $p =$

$p = P$, e $\int f dy = o$, quindi $A = \frac{mU^2}{2}$, e però $\int f dy = \frac{mU^2}{2} - \frac{mU^2P^2}{2p^2}$, e di più ponendovi num. 480. $2FS = mU^2$, verrà poi $\int f dy = FS - \frac{FSP^2}{p^2}$, sarà cioè $p = \frac{P\sqrt{FS}}{\sqrt{FS - \int f dy}}$. Ed eccoci arrivati all' equazione della quantità p, ch' ha rapporto con le distanze dal Centro, la quale potrà servire, almeno in molti casi, per farci conoscer qual sia la Curva dal projetto descritta, e costruirla eziandio. Sicchè potrassi questa cotale equazione, come per una formula generale assumere, e sarà la prima.

542. Allorchè poi le forze faran descrivere Curve con legge, ch'al Centro presentino il loro convesso, vale a dire che uso far debbasi dell' altro canone num. citato 498. operando come antecedentemente, risulterà $p = \frac{P\sqrt{FS}}{\sqrt{FS + - \int f dy}}$, che varrà per i casi di tal sorta, e sarà la seconda. E perciò sì nell' una che nell' altra adattandovi la particolare ipotesi delle forze, verrà ad aversi in termini finiti la quantità proporzionale con la nota p perpendicolare alla Curva, siccome colli esempj farem vedere.

E S E M P I O I.

543. Stando le forze predette in proporzione diretta delle distanze, cioè secondo le premesse nozioni $F : f ::$

$F : f :: b : y$, se ne ricava che $f = \frac{Fy}{b}$, e perciò moltiplicando per dy, $fdy = \frac{Fydy}{b}$, e coll' integrare $\int f dy = \frac{Fy^2}{2b} + A$, e riflettendo come sempre che $y = b$, quando $\int f dy = o$, viene $A = \frac{-Fb}{2}$; laonde $\int f dy = \frac{Fy^2 - Fb^2}{2b}$, e così nella prima num. 541. surrogandola in luogo di $\int f dy$, haffi $p = \frac{P\sqrt{2bFS}}{\sqrt{2bFS + Fb^2 - Fy^2}} = \frac{P\sqrt{2bS}}{\sqrt{2bS + b^2 - y^2}}$, e per la seconda num. 542. $p = \frac{P\sqrt{2bS}}{\sqrt{2Sb - b^2 + y^2}}$. La prima delle quali la stessa si è di quella direttamente prodotta, dalla posizione, che nell' Ellisse viaggiasse il projetto num. 522. e la seconda d' allorchè l' Iperbola scorreva num. 524. donde in effetto viddesi le forze risultar tali, e quali assunte presentemente sonosi.

COROLLARIO I.

544. Restando ferma la prefata ipotesi delle forze, e supposto gettato il mobile con direzione perpendicolare ad AB, giacchè la distanza $AB = b$ sempre ella è la medesima, e di più $P = b$ eziandio, sostituendo cotali valori in ambedue le stabilite formule, riesce

riesce che $p = \frac{P^{\frac{1}{2}}\sqrt{2S}}{\sqrt{2PS \pm b^2 \mp y^2}}$; donde scorgesi ch' in qualunque forma il projetto dirigasi, le Curve accennate sempre egli descrive.

COROLLARIO II.

545. Il tempo, perchè num. 501. ritrovasi $t = \frac{2ABD}{PU}$ allorchè sta in D il grave, verrà perciò nel precedente caso $t = \frac{2ABD}{bU}$.

ESEMPIO II.

546. In reciproca ragion duplicata delle lontananze dal centro stieno le forze, quindi è ch' avremo $F : f :: \frac{1}{b^2} : \frac{1}{y^2}$, e però $f = \frac{Fb^2}{y^2}$, ed $f\,dy = Fb^2y^{-2}dy$, perlochè integrando, $\int f\,dy = \frac{Fb^2}{-y} + A$; e perchè con la consueta forma determinata la costante, viene $A = Fb$, laonde sostituendo, $-\int f\,dy = \frac{Fb^2 - Fby}{y}$; Sicchè surrogato tal valore nella prima, risulta $p = \frac{P\sqrt{Sy}}{\sqrt{b^2 + Sy - by}}$.

447. Tre diversi casi dar si possono per rapporto alla nominata equazione; primieramente se $S = b$, riduce-

ducesi che $p = \frac{P}{b}\sqrt{Sy}$, e viene alla Parabola, ove al fuoco d' essa son dirette le forze, conforme direttamente apparisce num. 530.

In secondo luogo può succedere, che sia S maggiore di b, cioè così $S - b$: nel terzo, a contrario, vale a dire $b - S$; ovvero esprimendo lo stesso, quando abbiasi $\pm y . \overline{S - b}$. Quindi facendo che $S - b = \frac{b^2}{2a}$, ridurremo l'equazione citata, in $p = \frac{P\sqrt{2aS}}{b} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a \mp y}}$, dove col segno negativo diverrà per l' Ellissi, col positivo per l' Iperbola, al fuoco delle quali abbian le forze la direzion loro, siccome vedesi dalla ritrovata sopra num. 535. fissata generalmente.

548. Sostituiscasi anche la ragion trovata nella formula seconda num. 542. d' allorchè la Curva è convessa verso il centro, e verrà $p = \frac{P\sqrt{Sy}}{\sqrt{Sy - b^2 + by}}$, e quivi pure, come poco anzi riflettendo di porre $S + b = \frac{bb}{2a}$, riescirà $p = \frac{P\sqrt{2aS}}{b} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y - 2a}}$, la quale esprimerà l' altra ipotesi dell' Iperbola, dove all' altro fuoco è diretta la forza num. 536.

S C O L I O I.

549. Dal precedente Esempio resta con evidenza provato, che le forze stando elle nella ragione ivi accen-

cennata, altre Curve non può il projetto descrivere, che le ricordate, dalle sezioni del Cono prodotte, e le quali al di loro foco hanno dirette le forze, poſciachè per converso la medesima equazione ricavasi, che dalla posizione d' esser tali le Curve prodotta veniva, conforme da' citati numeri apparisce. Newton il sommo dall' aver soltanto sciolti i diretti Problemi, cioè delle date Curve, ne conchiudeva, senza dimostrazione, che i conversi, cioè assumendo in quella ragione le forze, che da' primi risultavano, esser veri necessariamente dovevano, vale a dire che le Curve stesse dovevansi solamente descrivere. Questa illazione però non sodisfaceva a pieno il gran Bernoulli Giovanni, mentre ei diceva, che altre Curve con tale ipotesi di forze descriver potevansi. Ma da quanto abbiam visto nel precitato Esempio, e da quello, che poco appresso occorrerà anche vedere con altro metodo, che per estenzione di questa nobilissima teoria sarà da me praticato, realmente solo elle posson essere le generate Curve da questa citata legge di forza suddetta.

SCOLIO II.

550. Si tiene per indubitato presso i Matematici tutti, che le forze de' corpi mossi, le quali in essi medesimi agiscono, stieno direttamente come le masse loro, e reciprocamente come il quadrato delle distanze dal centro dove sono eglino tendenti; quale ella è per appunto la legge antecedentemente fissata, conforme veduto abbiamo, ed in virtù della quale il projetto una sezione Conica descrive, il di cui Foco, il centro delle forze stesse divenga. Sicchè i Pianeti, ch' intorno al Sole come per loro Centro si aggirano, non essendovi ragione in

in contrario, per cui non debba per essi ammettersi la detta proporzion di forze, camminar parimente dovranno in una di queste ricordate Curve, ch' in un fuoco di esse, qual Centro, sia il Sole medesimo collocato. Perchè poi dall' osservazioni è stabilito, che con il loro corso descrivono un' Orbita, la quale circolare ei non è, ma dall' altro canto ella è tale, ch' in se stessa ritorna, non essendovi che l' Ellisse di tal proprietà dotata, potrassi dunque asserire, che con i loro periodici giri questa curva producono, siccome eziandio, ch' in un Fuoco di essa il Disco solare, qual centro ne esista. Dall' osservazioni parimente il sagacissimo Keplero, e particolarmente nel corso di Marte, ritrovò con modo diretto, che di fatto l' accennata curva assolveva, quindi è che resta omai stabilita, e come incontrastabile una tale teorica appresso i Filosofi, e Matematici tutti.

E S E M P I O III.

551. Prendendosi le forze in ragion reciproca de' cubi delle distanze, di maniera che abbiasi $F:f::\frac{1}{b^3}:\frac{1}{y^3}$, che facendo al solito, riesca poi $f=\frac{Fb^3}{y^3}$, ed $fdy=Fb^3y^{-3}dy$, integrando, resta $\int fdy=\frac{-Fb^3}{2y^2}+A$; ed attesochè $A=\frac{Fb}{2}$, vien poi $\int fdy=\frac{-Fb^3+Fby^2}{2y^2}$, laonde col surrogare nella prima solita formula; n. 541. risulta $p=\frac{yP\sqrt{2S}}{\sqrt{2Sy^2+b^3-by^2}}$. Facendosi $2S=b$, conver-

tesi in $p = \frac{Py}{b}$, ed è l' equazione, che c' indica essere alla Logaritmica num. 525.

Quando $2S > b$, pongasi che $2S - b = n$, e viene $p = \frac{yP\sqrt{2S}}{\sqrt{b^3 + ny^2}}$, e sarà ella esprimente la Spirale iperbolica num. 527.

E se poi $2S < b$, la quale è $b - 2S = -n$, resterà $p = \frac{Py\sqrt{2S}}{\sqrt{b^3 - ny^2}}$, che verrà ad altra Curva.

ESEMPIO IV.

552. Nella ragion reciproca della quinta dignità delle lontananze suppongansi essere, a segno che stia $F : f :: \frac{1}{b^5} : \frac{1}{y^5}$, e però $f = \frac{Fb^5}{y^5}$, ed $fdy = Fb^5y^{-5}dy$, e così poi $\int fdy = -\frac{Fb^5}{4y^4} + A$; e perchè $A = \frac{Fb}{4}$, dunque $\int fdy = \frac{-Fb^5 + Fby^4}{4y^4}$, e nella prima num. 541. ponendovi tal valore, sarà $p = \frac{Py^2\sqrt{4S}}{\sqrt{4Sy^4 + b^5 - by^4}}$.

Se $b = 4S$, viene allora $p = \frac{P}{b^2} \times yy$, vale a dire ch' al Circolo sarà l' equazione, ed il centro delle forze nella circonferenza, num. 509. Ipotesi I.

S' om-

S' ommettono per brevità altre ipotesi, che trattar si potrebbero, valendo per l' intento nostro d' aver veduto il metodo, siccome anche la prova de' quesiti diretti, da' conversi confermati.

S C O L I O.

553. Non potrà adunque cadere in dubbio, rispetto ai premessi esempj, che dal rapporto della quantità p, alla Curva perpendicolare, e la distanza dal Centro, non abbiansi le Curve descritte, mentre con modo inverso se ne è prodotta l' equazion medesima da diretti quesiti rinvenuta.

Non in ogni caso però avverrà lo stesso, attesochè dalla relazione suddetta, la natura della Curva non puossi molte volte conoscere, nè aversi per conseguenza la di lei costruzione; quindi è ch' ad altri particolari metodi, per arrivare a tal fine son ricorsi i Meccanici. Per ampliare per tanto ancora io una sì nobile, e famigerata teorica, e per dilucidare sempre più tal materia, proseguirò il principiato metodo, valendomi della fissata formula num. 541. quale egli è $p = \frac{P\sqrt{FS}}{\sqrt{FS \mp \int f dy}}$, riducendola ad altra espressione, applicabile in varie, e particolari quistioni, siccome ora farem per vedere.

P R O B L E M A   G E N E R A L E.

Date le potenze tendenti al centro in qualche proporzione delle distanze, ritrovare la Curva descritta. Tav. 12. Fig. 1.

554. Prendasi, come poco anzi fu notato, l' equazione esprimente il rapporto della quantità p, e le

 lon-

lontananze dal centro, sì per l'un caso di forza positiva, che negativa, cioè $p = \frac{P\sqrt{FS}}{\sqrt{FS \mp \int f dy}}$; ed avvegnachè sia $p = \frac{y dx}{ds}$ num. 494. col sostituirvi tal valore, come l'altro di $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ dell'elemento curvilineo, convertesi in $\frac{y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{P\sqrt{FS}}{\sqrt{FS \mp \int f dy}}$, che maneggiata, risulta $dx = \frac{P\sqrt{FS} \times dy}{\sqrt{FSy^2 - P^2 FS \mp y^2 \times \int f dy}}$, che in questo metodo nominerassi la prima.

555. Giacchè dx non può integrarsi num. 500. ed altresì non potrassi il più delle volte dall'equazione differenziale conoscer la Curva in ispecie qual sia, per ottenerne il fine, sostituiscasi in vece d'essa differenza, l'equivalente $\frac{y dz}{c} = dx$ num. citato, essendo il differenziale $dz = NK$, archetto minimo di cerchio, col raggio $= c$ disegnato. Laonde viene

$$dz = \frac{c P\sqrt{FS} \,.\, dy}{y\sqrt{FSy^2 - P^2 FS \mp y^2 \times \int f dy}}$$, e sarà la seconda, in ambedue le quali surrogando poi le particolari ipotesi della forza, e poi integrando, ove ciò può farsi, ci presenterà, in ispecie questa seconda, la relazione dell'accennato arco circolare z, e la distanza y, da che ricaveremo la Curva cercata.

E' vero però che l'integrarsi la ridotta equazione non

non ſarà così agevole, bensì rieſcirà facile ridurla almeno ad archi circolari, o Settori iperbolici, ovvero a qualunque altra quadratura di ſuperficie, da cui poi, e dalla relazione dell' archetto predetto, indurre ſe ne potrà la coſtruzione della Curva cercata; con gli eſempj verrà più in chiaro quanto ſi dice.

ESEMPIO I.

556. Fatto dunque primieramente ch' abbiano le forze la ſemplice ragione delle diſtanze, di cui ſappiamo eſſerne l' eſpreſſione, num. 543. come ſiegue $\int f dy = \frac{Fy^2 - Fb^2}{2b}$, ſoſtituendo nella precedente, ch' è delle formule la ſeconda, haſſi $dz = \frac{cP\sqrt{2bS} \times dy}{y\sqrt{2bSy^2 - 2bSP^2 \mp y^4 \pm b^2y^2}}$, equazione, ch' ha ſeparate l' indeterminate, e perciò da poterſi in qualche forma coſtruire.

SCOLIO.

557. La ragione delle potenze de' corpi come la reciproca de' quadrati delle diſtanze, ſiccome fu ſopra avvertito, credeſi eſſer egli la vera in natura, omai comunemente da tutti; quindi non ſarà fuor di propoſito nella preſente eſtenſione di metodo applicare la detta ipoteſi, ſciogliendo il Problema, che de' più facili al certo non rieſce. Per ciò fare ſarà neceſſario premettere alcune nozioni, che dall' Algebra ci ſi inſegnano, per quei Lettori almeno, che bene alla memoria non le tengono, e le quali ne' due ſeguenti Lemmi ſaranno riportate. LEM-

LEMMA I.

Tav. 12. Fig. 2. *Dall' equazione differenziale di una Curva al fuoco, determinar l'equazione della Curva medesima all'asse riferita.*

558. La Curva ADN abbia per fuoco B, e per Asse AK, e venga ad ambedue tali rapporti considerata; fatta $BD = y$, onde sia $GN = dy$, e $GD = dx$, secondo il solito, l'equazione differenziale esprimente la relazione al fuoco della medesima, esser dovrà per una parte contenuta dall'elemento dx, e dall'altra, dalla differenza dy, unita con qualunque sua funzione, la qual funzione s'indicherà da me nella quantità K; e perciò $K dy = dx$, diverrà l'equazione. Ciò posto, si denomini $BM = z$, ed $MO = dz$, $MD = t$, cosicchè $NE = dt$; ne viene da ciò, che $\overline{DN}^2 = dx^2 + dy^2$, e similmente $\overline{DN}^2 = dz^2 + dt^2$, cioè $dx^2 + dy^2 = dz^2 + dt^2$; e perchè $dx^2 = K^2 dy^2$, quindi sostituendo, $K^2 dy^2 + dy^2 = dz^2 + dt^2$. Dalla costruzione è anchè $\overline{BD}^2 = y^2 = zz + tt$, e perciò differenziando, e quadrando, ne risulterà poi $dt^2 = \frac{y^2 dy^2 - 2yzdydz + z^2 dz^2}{y^2 - z^2}$, donde, surrogando in vece di dt^2, e come è necessario riducendo, hassi $K dy = \frac{y dz - z dy}{\sqrt{y^2 - z^2}}$.

Dovendo separarsi le variabili, pongasi che $z = \frac{yq}{e}$, e perciò $dz = \frac{q dy + y dq}{e}$, laonde in luogo della differenza dz sorrogando, viene $K dy = \frac{y^2 dq}{e\sqrt{y^2 - z^2}}$; e col

e col porvi l'altro valore di z^2, risulta finalmente $\frac{K\,dy}{y} = \frac{dq}{\sqrt{ee - qq}}$, quale è l'equazione all'asse ridotta, e che servir dee al fine propostoci, siccome apparirà dal seguente

LEMMA II.

Nell' equazione differenziale $K\,dy = du$ al fuoco riferita, vuolsi determinare la funzione K, per le sezioni del Cono in generale.

559. La figura poco fa nel Lemma I. citata abbiasi per una sezione conica, la di cui equazione al fuoco riportata, generalmente s'esprima per tutte, conforme costa, in tal forma, cioè $a \mp \frac{nz}{b} = \sqrt{zz + tt} = y$, valendo il segno meno per quando l'ascisse prese sono dal fuoco B, verso il vertice A, e l'altro a contrario. Si sa altronde ch'in essa sarà contenuta l'equazione alla Parabola, allorchè $n = b$, e parametro $= 2a$. All'Ellisse coll'asse trasverso $= \frac{2abb}{bb - nn}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{bb - nn}}$, e distanza dal foco al vertice $= \frac{ab}{b + n}$, posto che b sia maggiore di n. All'Iperbola poi asse trasverso $= \frac{2abb}{nn - bb}$, conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{nn - bb}}$; lontananza dal fuoco al vertice la medesima, ed b minore di n. Al circolo $n = o$, e diametro $= 2a$.

Nel

Nel Lemma citato avendosi assunto $z = \frac{qy}{e}$, surrogandosi nell' equazione generale in vece di z, hassi $aeb \pm nqy = bey$, cioè $q = \pm \frac{be}{n} \mp \frac{aeb}{ny}$, e questa quadrandola in oltre, e variando i segni, riesce $-q^2 = -\frac{b^2e^2}{n^2} + \frac{2ab^2e^2}{n^2y} - \frac{a^2e^2b^2}{n^2y^2}$. Se aggiungasi ad ambi i membri dell' equazione l' e^2, diverrà $e^2 - q^2 = e^2 - \frac{b^2e^2}{n^2} + \frac{2b^2e^2a}{n^2y} - \frac{a^2e^2b^2}{n^2y^2}$, che ridotta al denominatore medesimo, e cavando la radice quadrata, è poi $\sqrt{e^2 - q^2} = \frac{\sqrt{n^2e^2y^2 - b^2e^2y^2 + 2b^2e^2ay - a^2e^2b^2}}{ny}$. Ciò stabilito si differenzj l' equazione poco anzi fissata, ed abbiamo $dq = \pm \frac{aebdy}{nyy}$, delle quali due compostane una, risulta, $\frac{dq}{\sqrt{e^2 - q^2}} = \frac{\pm abdy}{y\sqrt{n^2y^2 - b^2y^2 + 2b^2ay - a^2b^2}}$. Perchè poi Lemma I. è $\frac{Kdy}{y} = \frac{dq}{\sqrt{e^2 - q^2}}$, sostituendo vien finalmente $Kdy = dx = \frac{\pm abdy}{\sqrt{n^2y^2 - b^2y^2 + 2b^2ay - a^2b^2}}$; che è per appunto ridotta al fuoco l' equazione differenziale, che tutte le sezioni del Cono abbraccia, in cui la funzione $K = \frac{\pm ab}{\sqrt{n^2y^2 - b^2y^2 + 2b^2ay - a^2b^2}}$; ciò stabilito si riassumeranno gli Esempj.

ESEM-

ESEMPIO II.

560. Stando dunque le forze nella ragion reciproca de' quadrati delle distanze, donde hassi num. 546. $\int f dy = \frac{-Fb^2 + Fby}{y}$, sostituendo nel canone generale, e sia nel primo num. 554. verrà $dx = \frac{P\sqrt{FS} \times dy}{\sqrt{FSy^2 - Fby^2 + Fb^2 y - P^2 FS}}$. col prendere ivi il segno negativo; in cui scorgesi ch'è equazione differenziale, ch' abbraccia tutte le sezioni coniche al loro foco riferite, attesochè si è la stessa del Lemma precedente, non avendo di variazione, se non che le quantità costanti, le quali non mutano le specie particolari di Curve.

ESEMPIO III.

561. Sien elle in ragion reciproca de' cubi delle distanze, cioè num. 551. $\int f dy = \frac{-Fb^3 + Fby^2}{2y^2}$; sostituendo nella prima, come poco anzi, si ha $dx = \frac{P\sqrt{2S} \times dx}{\sqrt{2Sy^2 - 2P^2S + b^3 - by^2}}$. Include varj casi tale espressione, e primieramente quello, ch' il diretto Problema conferma; cioè dell' esser $b = 2S$, da che risulta $dx = \frac{P}{\sqrt{b^2 - P^2}} \times dy$; quale per appunto si è l'equazione differenziale alla Spirale logaritmica, siccome costa, ed è Curva di quelle proprietà dotata, ch' al num. 525. furon descritte; dove, poichè $BD = y$, sarà il punto D, punto nella Curva cercata, e B, ch' è suo polo, sarà

sarà il centro delle forze. Fra l' infinite poi, che di tale specie esser possono, la particolare della nostra equazione, otterrassi dalla ragione del triangolo datoci, rapporto ai lati esso componenti, quale egli è di quella di P all' altra di $\sqrt{b^2 - P^2}$.

COROLLARIO I.

562. Supposto $b = P$ nella precedente equazione, si ha $dx = \frac{P}{o} \times dy$, cioè $dy = o$, ovvero che nulla diviene la differenza delle distanze; ed avvegnachè ciò succeda quando $y = b$, conforme dalla costruzione praticata è manifesto, e perciò dovendosi descrivere la Curva con data distanza, cioè con la lontananza b invariabile, si genererà il circolo, e l' angolo di projezione altresì diverrà retto; il che eziandio vedesi dalla stessa posizione di $b = P$, alla costruzione nota applicando.

COROLLARIO II.

563. Posciachè, per ottenersi integrato il differenziale dx, si è sostituito num. 500. a segno che $dx = \frac{y\,dz}{c}$, nell' esposta equazione surrogando un tal valore, viene $dz = \frac{cP}{\sqrt{b^2 - P^2}} \times \frac{dy}{y}$; cioè l' archetto circolare dz per la semplice Logistica ordinaria sarà costruito, donde potrà in seguito aversi la relazione per costruire la Curva cercata, con modo, e forma, che in breve vedremo.

CO-

COROLLARIO III.

564. Prendendosi nell' inferita equazione $dx = \frac{P\sqrt{2S} \times dy}{\sqrt{2Sy^2 - 2P^2S + b^3 - by^2}}$ che $b^3 = 2P^2S$, viene allora $dx = \frac{P\sqrt{2S} \times dy}{\sqrt{2Sy^2 - by^2}}$; di più col porre che $2S$ sia di b maggiore, supposizione pur fatta al num. 551. e che come ivi $2S - b = n$, riducesi $dx = \frac{P\sqrt{2S}}{\sqrt{n}} \times \frac{dy}{y}$; cioè l' equazione differenziale della Spirale iperbolica, conforme al numero citato risulta coll' altro metodo, la quale altronde viene in ispecie determinata dalla quantità $\frac{P\sqrt{2S}}{\sqrt{n}}$.

SCOLIO.

565. Col primo metodo, ovvero coll' equazione differenziale, che la prima si è chiamata num. 554. hannosi ne' passati Esempj sciolte le quistioni delle date forze; resta adesso di far vedere altri casi, coll' applicazione della seconda num. 555. dove per non potersi integrare il differenziale dx, l' abbiam ridotto proporzionale ad archetto di circolo, e dalla cui relazione ritrovar deesi la Curva dal projetto descritta.

ALTRIMENTI.

566. Costa adunque che il Canone si è, num. citato,

 $dz =$

$$dz = \frac{cP\sqrt{FS} \times dy}{y\sqrt{FSy^2 - P^2FS \mp y^2 \times \int f dy}}.$$

Sicchè primieramente se in questo sostituiscasi la ragione delle forze di questo terzo esempio, riducesi in $dz = \frac{cP\sqrt{2S}\,.\,dy}{y\sqrt{2Sy^2 - by^2 + b^3 - 2P^2S}}$, prendendo sempre il segno meno per lo concavo della Curva; della quale espressione varie ipotesi posson supporsi, che per maggior chiarezza, partitamente saran maneggiate.

IPOTESI I.

567. Se $2S > b$, in tal caso come quantità positiva potrà farsi $2S - b = n$; se poi $2S < b$, diverrà $-2S + b = -n$, e perciò applicando ai termini dell' equazione, dove ritrovasi moltiplicato l' y^2, si sostituirà per essi $\pm ny^2$. Di più siccome può egli accadere che $2P^2S$ minor sia, e maggiore di b^3, come pure anche eguale, si metterà perciò tal quantità $= \pm na^2$; quindi col surrogare ambedue tali espressioni, viene ad essere $dz = \frac{cP\overline{2S} \times dy}{y\sqrt{\pm ny^2 \pm na^2}}$. Ciò posto si rifletta, che se ambedue i termini sotto la radice sieno negativi, convertirassi in equazione di radice immaginaria; se $b^3 = 2P^2S$, il che indicherà che $na^2 = 0$, ed il segno meno sia prefisso all' altro termine, egualmente sarà immaginaria; se poi positivo divenga, risulterà $dz = \frac{cP\sqrt{2S}}{\sqrt{n}} \times \frac{dy}{y^2}$, equazione algebraica, ovvero da potersi integrare, siccome vedesi.

IPO-

I P O T E S I II.

568. Poſti i termini ſotto il vincolo radicale ambedue poſitivi, poſciachè il raggio $= c$ aſſunto, ad arbitrio può determinarſi, facciaſi dunque $c = \frac{\sqrt{n}}{p\sqrt{2S}} \times aa$, ed allora nell' antecedente ſtabilita equazione ſoſtituendo, avremo $dz = \frac{aady}{y\sqrt{yy+aa}}$. Per integrarſi la quale, pongaſi che $\sqrt{yy+aa} = t$, e quindi $\frac{tdt}{y} = dy$; ſicchè i reſpettivi valori ſurrogando, viene $dz = \frac{aadt}{tt-aa}$; dividaſi queſta in due altre, ch'alla medeſima equivalgano, e ſarà eſpreſſa così $dz = \frac{\frac{1}{2}adt}{t-a} - \frac{\frac{1}{2}adt}{t+a}$; dove integrando, riſulta $z + A = \frac{1}{2}a\, l\frac{t-a}{t+a}$; quivi di nuovo ripigliando il valore dell'equazione auſiliare, rieſce $z = \frac{1}{2}a\, l\frac{\sqrt{yy+aa}-a}{\sqrt{yy+aa}+a} - A$; la coſtante A facilmente otterraſſi, rifletttendo che quando $z = o$, ei può venire $y = b$, ovvero cadendo il punto di projezione in S, ſarà $y =$ al raggio del circolo preſo, ſiccome dall' iſpezione della ſopraindicata fig. 6. appariſce.

Varrebbe lo ſteſſo metodo per integrarſi, quando che nella prefata equazione, il termine dell' incognita ſotto la radice, negativo, e l' altro poſitivo foſſe; cioè ridotta ſarebbe così $dz = \frac{aadt}{tt-aa}$, come l'antecedente.

IPO-

IPOTESI III.

569. Supponendo finalmente ch' il termine, ove è l' incognita sia positivo, e l' altro negativo, cioè $dz = \frac{aady}{y\sqrt{yy - aa}}$, ponendo il raggio del circolo come nell' ipotesi precedente, coll' ajuto della medesima sostituzione, hassi $\frac{tdt}{y} = dy$; da che ricavasi col solito sostituire, $dz = \frac{aadt}{tt + aa}$, equazione differenziale esprimente l' archetto elementare di cerchio, ch' abbia per tangente $= t$, e raggio $= a$, da quel che per l' Algebra è noto; Laonde da ciò si potrà col rapporto dell' arco z, e questo, indagare la generata Curva, e nell' esempio seguente, del modo, e maniera ne vedremo l' operazione.

ESEMPIO IV.

570. In proporzione della dignità quinta delle distanze prendansi le forze, ed avremo num. 552. $ffdy = \frac{-Fb^5 + Fby^4}{4y^4}$, preso il canone che riguarda il concavo della curva; quindi in questa, che trattasi seconda formula sostituendo, è $dz = \frac{cP\sqrt{FS}\,.\,dy}{y\sqrt{FSy^2 - P^2FS - y^2 \times \frac{-Fb^5 + Fby^4}{4y^4}}} =$

$= \frac{2cP\sqrt{S}.dy}{\sqrt{4Sy^4 - 4P^2Sy^2 + b^5 - by^4}}$. Quì anche se $4S = b$,

riducesi che $dz = \frac{cPdy}{\sqrt{b^4 - P^2y^2}} = \frac{cdy}{\sqrt{\frac{b^4}{P^2} - yy}}$; ed in

essa parimente il raggio, ch' ad arbitrio fu preso, pongasi che sia la lontananza stessa dal punto di projezione ed il centro, per più facilità, cioè $c = b$; e di più volendosi, ch' il membro dell' equazione da paragonarsi con dz, ridotto sia ad archetto di circolo, donde $P = b$, viene in tal caso $dz = \frac{bdy}{\sqrt{bb - yy}}$, e sarà perciò seno del complimento $= y$, da cui la curva descritta così ricavasi.

571. Posto essere il quadrante di cerchio SNQ, Tav.12. Fig. 3. quel tale col raggio $= b$ descritto, e però la supposizione precedente portando ch' S sia il punto di projezione, ed il Centro delle forze B, potrassi porre che l' arco SN sia quel tale integrato, quì avanti espresso, e da cui o tolto, o aggiunto siasi l' arco costante, secondo le regole; dunque BH sarà per sua natura il seno del complimento $= y$. Si prenda $BO = BH = y$, dovrà perciò il punto O, estremità della citata variabile y, esser il punto nella Curva, che cercasi; di quale specie ella sia, in questa forma s' indaga.

Dal punto O alla BS conducasi il perpendicolo $OL = t$, e $BL = q$ ambedue indeterminate; prolungata BO fino in N, tirisi la NH ad LO paralella, avrassi con ciò la similitudine de' triangoli BLO, BHN, e perciò $q : t :: y : \sqrt{bb - yy}$, cioè $q\sqrt{bb - yy} = ty$,

$= ty$, ficcome $qqbb = yy \times \overline{tt + qq}$. Parimente è $\overline{BO}^2 = yy = qq + tt$, ficchè in luogo dell' y^2 furrogando, haffi $tt = bq - qq$; quale egli è, come vedefi, equazione al circolo, ch' ha per fuo intiero diametro b, prefa l' afciffa dal vertice. Onde difegnato SOB, farà ei la Curva cercata, e ch' avrà il punto B centro delle forze, nella circonferenza d' effo cerchio, conforme di fatto colla fuppofizione fteffa di $4S = b$, e delle forze nella ragione medefima, rifultò tal Curva num. 552. coll' altro metodo, ed altresì dal num. 509. direttamente apparifce.

S C O L I O.

572. Veduta la maniera di procedere per inveftigare la Curva con quefto fecondo metodo, il quale per brevità ad altri cafi non l' eftenderemo; e riputando anche fuperfluo l' efemplificare con altre Ipotefi di forze, tanto più ch' in natura credefi omai da tutti, che foltanto il cafo delle predette in ragion reciproca de' quadrati delle diftanze abbia luogo, eccetto che in qualche particolar cafo dal Newton già ftimato, in cui feguir debbono la femplice ragion diretta delle medefime, ficcome da Principj fuoi può vederfi, profeguiremo a trattare i quefiti converfi relativamente all' altre affezioni delle velocità, dalle quali affegnate ritroveremo le Curve defcritte.

PROBLEMA GENERALE.

Effendo date le velocità in ragion reciproca delle diftan-

ſtanze alla dignità n elevate, rinvenire la Curva.

573. Reſtando la conſueta figura, come anche la ſolita coſtruzione, a ſegno che ſia l'iniziale velocità $= U$, dovrà dunque eſſer dalla poſizione preſente, $U : u :: \frac{1}{b^n} : \frac{1}{y^n}$, onde è che viene $U = \frac{u y^n}{b^n}$; e ſiccome ſi ha dalla più volte ricordata equazione, $u = \frac{PU}{p}$, e però ſoſtituendo, $p = \frac{P y^n}{b^n}$, e perchè pure è $p = \frac{y\, dx}{ds}$, quindi $b^n y\, dx = P y^n \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e col quadrare, e maneggiarſi l'equazione, riduceſi $dx = \frac{P y^n dy}{\sqrt{b^{2n} y^2 - P^2 y^{2n}}}$.

574. Di più ſe l'arco differenziale dx ridur vogliaſi ad integrare, avraſſi, da quel che coſta, $dz = \frac{c P y^n dy}{y \sqrt{b^{2n} y^2 - P^2 y^{2n}}}$, che ſarà egli il ſecondo canone, come ſopra ſi fece, che poi tanto nel precedente ch' in queſto, rimarrà da porviſi i particolari valori dell' Ipoteſi, da eſprimerſi con l'eſponente n, per averne da ciò la Curva cercata, conforme dagli eſempj ſeguenti vedraſſi.

ESEMPIO I.

575. Facciaſi $n = \frac{1}{2}$, il che vuole egli dire d'aſſumer le reſpettive velocità in ragion reciproca, e ſuddupla delle diſtanze, ei ne riſulta, applicando il fatto

Sſ nella

nella prima formula, $dx = \frac{Py^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{by^2 - P^2y}} = \frac{Pdy}{\sqrt{by - P^2}}$; che è per appunto l' equazione differenziale della parabola, ch' ha le forze dirette al fuoco num. 559. e vedesi dovere esser così dal diretto eziandio num. 531.

576. Se pongasi nella seconda del num. 574., è allora $dz = \frac{cPdy}{y\sqrt{by - P^2}}$; e per integrarsi dipoi, facendo $\sqrt{by - P^2} = t$, onde sia $2tdt = bdy$, col sostituire i proprj valori, ricavasi $dz = \frac{2cPdt}{tt + PP}$, e comecchè il raggio è arbitrario, talmente che può farsi $c = \frac{P}{2}$, produrrassi $dz = \frac{4ccdt}{4cc + tt}$, che così vien ridotta a differenziale d' arco di circolo del raggio $= 2c$, tangente $= t$, dal cui rapporto determinar potrassi la Curva descritta.

ESEMPIO II.

577. Stando nella semplice ragion reciproca delle distanze, o sia così, $U : u :: \frac{1}{y} : \frac{1}{b}$, e che esprimesi con $n = 1$, operando, riducesi l' equazione del primo caso in $dx = \frac{Pydy}{\sqrt{b^2y^2 - P^2y^2}} = \frac{P}{\sqrt{b^2 - P^2}} \times dy$, vale a dire equazione differenziale della Spiral logaritmica num. 561. e dove direttamente risolvendo il Problema, tali, quali assunte sono le celerità risultarono.

578.

578. E valendosi dell'altra equazione del caso secondo, è $dz = \frac{cP}{\sqrt{b^2 - P^2}} \times \frac{dy}{y}$, cioè il membro d'equazione con l'archetto dz paragonato, si potrà integrare per la Logaritmica ordinaria, ch' ha per tangente $\frac{cP}{\sqrt{b^2 - P^2}}$, donde poi servirebbe per rinvenire la cercata Curva.

E S E M P I O III.

579. Presa la $n = 2$, vale a dire la velocità in ragione inversa de' quadrati delle distanze, sostituendo tale Ipotesi nella seconda formula, verrà $dz = \frac{cPdy}{\sqrt{b^4 - P^2y^2}}$; in cui potendosi egli fare $c = \frac{bb}{P}$, ridurransi poi in $dz = \frac{cdy}{\sqrt{cc - yy}}$, ch' è equazione consimile a quella del num. 570. dalla quale si rinverrebbe esser la Curva descritta il Circolo, col Centro delle forze situato nella circonferenza di esso, che è come là parimente fu trovato, e come di fatti avvenir dee da tale ipotesi, num. 511.

E S E M P I O IV.

580. Se $n = 3$, servendosi della seconda, avremo $dz = \frac{cPy^3dy}{y\sqrt{b^6y^2 - P^2y^6}} = \frac{cPydy}{\sqrt{b^6 - P^2y^4}}$; acciocchè ri-

Ss 2 duci-

ducibile sia l' equazione a qualche quadratura, si farà $y^2 = At$, valendo la quantità t per una incognita, ed A per un' altra da determinarsi; laonde risulterà $ydy = \frac{Adt}{2}$, sicchè tutti due i predetti valori sostituiti, hassi che

$$dz = \frac{\frac{c}{2} \times APdt}{\sqrt{b^6 - P^2 A^2 t^2}}$$, e perchè il raggio solito è arbitrario, qual sia $\frac{c}{2} = \frac{b^3}{PA}$, ovvero $\frac{cc}{4} \times P^2 A^2 = b^6$, sostituendo, ne viene $\frac{\frac{c}{2} dt}{\sqrt{\frac{cc}{4} - tt}} = dz$, quale egli è un differenziale d'arco di cerchio col raggio $= \frac{c}{2}$, e per seno di complimento $t = \frac{y^2}{A}$, da cui otterrassi la Curva, nella forma seguente.

Tav. 12. Fig. 4. Posciachè posto abbiamo $\frac{b^3}{PA} = \frac{c}{2}$, sciolta tal proporzione, starà $\frac{b^2}{P} = c$, ed $A = 2b$; dunque con ciò si è determinata l' assunta A, ch' introdotta nel prefato raggio, si ha $c = \frac{bb}{P}$; quindi con esso descritto sia il quadrante BSO; e supposto integrato secondo le regole, che SK sia l' arco, diverrà $BL = t$: presa BQ a questa eguale, il punto Q esser dovrebbe punto in Curva, se la medesima variabile t fosse l' incognita della ricordata

data equazione; ma $t = \frac{yy}{2b}$, cioè y media proporzionale, attesochè $2b : y :: y : t$, e perciò determinata con tal ragione, supponiamo esser $BN = y$; Onde è che A essendo punto di projezione, la Curva AN sarà la descritta con questa ipotesi, di cui ricavasi l'equazione così

Conducasi la perpendicolare HN, e si chiami $= z$, e $BH = q$, per aversi la somiglianza de'triangoli BLK, BHN, verrà $t : \sqrt{\frac{cc}{4} - tt} :: q : z$, e quivi ponendo i necessarj valori, sarà $\frac{yy}{2b} : \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{y^4}{4b^2}} :: q : z$, cioè $y^4 : c^2b^2 - y^4 :: q^2 : z^2$; e dividendo, $y^4 : c^2b^2 :: q^2 : q^2 + z^2$; la qual ragione ad equazione ridotta, col surrogare in vece d' $y^4 = \overline{q^2 + z^2}^2$, finalmente avremo $\overline{zz + qq}^2 = q^2c^2b^2$, per l'equazion della Curva.

E S E M P I O V.

581. Fattasi $n = o$, la ragione della velocità $U : u :: \frac{1}{b^n} : \frac{1}{y^n}$, diviene in tal caso $U : u :: 1 : 1$, ciò costante, ovvero $U = u$, ch'è il caso del num. 475. in cui è il circolo la Curva descritta, ed ha per Centro delle forze il Centro del Circolo stesso num. 474.

582. Valendosi della seconda formula num. 574. Tav.12. Fig. 5. con tal condizione s'avrebbe $dz = \frac{cPdy}{y\sqrt{y^2 - P^2}}$, in cui

cui supposto il raggio $c=P$, riescirà $dz=\frac{ccdy}{y\sqrt{yy-cc}}$; ridotta così l' equazione ad arco di circolo, col raggio accennato, e segante $=y$. Ciò posto col supporre $c=P$, il punto di projezione in S verrà a cadere, onde tirata la tangente SE, e stando $BE=y$, e dipoi anche condotta l' infinitamente vicina Br, e descritto l' archetto Eb, sarà $br=dy$, ed $NK=dz$ è il differenziale solito; starà pertanto $dz : Eb :: c : y$, e per la similitudine de' triangoli Ebr, BSE, $Eb : br :: c : \sqrt{yy-cc}$; Sicchè componendo, $dz : dy :: cc : y\sqrt{yy-cc}$; cioè $dz=\frac{ccdy}{y\sqrt{yy-cc}}$, quale egli è l' equazione stabilita.

COROLLARIO I.

Tav. 12. Fig. 6. 583. Per quanto vedesi dalla precedente figura, coll' essere $BE=y$ lontananza dal centro, ed E luogo, ove ritrovasi il projetto dal punto S partito, per la tangente SE, con tale anzidetta posizione, ei scorrebbe, il qual viaggio rettilineo sarebbe, e non Curvilineo, conforme di fatto Curvilineo esser dovrebbe. Sicchè ci fa avvertire il supposto, che per divenir tale, all' arco SK, o deesi aggiungere, o defalcare qualche arco costante, siccome porta l' integrare. Imperocchè supposto che questo siasi determinato essere $SQ=KH$, presa $BD=y=BE$, sarà allorà il punto D, punto in Curva, ed SD pure diverrà l' andamento della medesima.

SCO-

S C O L I O.

584. La suppofizione delle velocità a qualche dignità n delle distanze innalzate, e reciprocamente a queste proporzionali, ci dà luogo eziandio d'estendere il metodo, qualora suppor le volessimo in ragione con le distanze direttamente; cioè stando $U : u :: b^n : y^n$, e però $U = \frac{u b^n}{y^n}$; surrogando come al num. 573. e nella seconda, maneggiando di più l'equazione, risulterà egli $dz = \frac{c P b^n dy}{y \sqrt{y^{2n+2} - P^2 b^{2n}}}$, in cui assegnando i valori in ispecie, succederà come negli Esempj antecedenti.

E S E M P I O VI.

585. Fattasi $n = 1$, ne verrà dal canone precedente, $dz = \frac{c P b dy}{y \sqrt{y^4 - P^2 b^2}}$, la quale ad arco circolare riducesi, operando così; pongasi $yy = At$, sicchè $dy = \frac{A dt}{2y}$, e sostituendo, $dz = \frac{c P b dt}{2t \sqrt{A^2 t^2 - P^2 b^2}}$, e fattosi il raggio $\frac{c}{2} = a$, come pure assunta $P = \frac{A a}{b}$, la quale A dalle due sciolte proporzioni determinasi, facendo la prima sostituzione si ha $dz = \frac{a P b dt}{A t \sqrt{tt - aa}}$, e colla seconda, $dz = \frac{aa dt}{t \sqrt{tt - aa}}$, vale a dire che ridotta l'abbia-

biamo a differenziale d' arco di cerchio, che abbia per raggio $= a$, e ſegante $t = \frac{yy}{A}$.

ESEMPIO VII.

586. Stando in ragion ſuddupla delle diſtanze, cioè $n = \frac{1}{2}$, rieſce $dz = \frac{cPb^{\frac{1}{2}}dy}{y\sqrt{y^3 - bP^2}}$, che maneggiata come poco anzi, ad arco circolare può ella ridurſi.

ESEMPIO VIII.

587. Quando $n = o$, verrà $dz = \frac{cPdy}{y\sqrt{y^2 - P^2}}$, la quale ſi è la ſteſſa del num. 582. quando che ſupponevaſi la velocità nella reciproca delle diſtanze; talmente dovendo avvenire, mentre o ſia nella reciproca, o nella diretta, con la prefata ſuppoſizione ſempre ſta $U : u :: 1 : 1$, cioè coſtanti le celerità.

Tralaſciate altre ipoteſi, sì perchè per gli uſi aſtronomici, e fiſici luogo non hanno, sì perchè non reducibili l' equazioni a quadrature tutte verrebbero, e però di niun eſercizio, a queſta prima Parte porremo fine.

PAR-

PARTE II.

Del Moto Curvilineo nel Mezzo resistente.

Dopo la sufficiente spiegazione delle leggi, e teoriche del moto Curvilineo libero nel voto, rimanvi da esaminar quelle, che nel Fluido, o mezzo resistente qualunque, diretto il grave, ne sieguono; il che in questa seconda, ed ultima Parte verrà eseguito.

CAPITOLO I.

Del Moto Curvilineo in genere, ne' Mezzi resistenti prodotto.

Della Resistenza del Mezzo, esaminando il Rettilineo, nella Parte II. del Libro I. a bastanza si è fatta parola, spiegandone la natura, e determinando le specifiche leggi; e siccome ivi fu notato, che qual potenza ritardante assumer deesi, così quì parimente nel Curvilineo, come tale eziandio vi avrà ella l' applicazione.

Pertanto a tal luogo riportandomi per tutto quello, ch' alla intelligenza della medesima appartiene, farò soltanto quì, per maggior chiarezza, l' analisi di cotal moto, fissandone insiememente i canoni alla soluzion de' quesiti, e ricerche necessarj.

ESEMPIO I.

Tav.13. Fig. 1. 588. Viaggiando in un mezzo resistente per la Curva AF, e giunto sia fino in D il projetto, d' una potenza qualunque affetto per la BD rappresentata, si è notato in diversi luoghi, che la predetta DB nelle due equipollenti forze DC, e BC può ella risolversi, l' una delle quali DC perpendicolare alla Curva, num. 445. Centripeta s' appella, e l' altra BC, ovvero DT, che per la tangente dirigesi, num. citato tangenziale vien detta. Posto ciò dovendosi da punto in punto per la direzione della tangente moversi il grave, e supposto nel mezzo resistente mosso, è per se evidente, ch' incontrerà della difficoltà per proseguire il moto, verbigrazia per la Curva AF, in vigor della resistenza medesima. Quindi la resistenza alla forza tangenziale sarà riferita: e perciò e dell' una, e dell' altra dovrà tenersi conto, per definire le leggi di tali moti Curvilinei nel pieno operati.

COROLLARIO I.

589. Relativamente alla potenza DC, vedesi che la resistenza, come resistenza nulla vi agisce, posciachè non essendo diretto il moto verso B, come nel rettilineo accade, la sola tangenziale sarà quella, che entra in esercizio; poichè la resistenza a questa sola apporta impedimento.

COROLLARIO II.

590. Quantunque però direttamente la potenza suddetta DC, che è la Centripeta, non entri in esercizio, nul-

nulladimeno indirettamente havvi parte, mentre senza di questa il moto curvilineo non descriverebbesi, siccome num. 443. si è notato, attesochè da essa l'equilibrio dipende: oltre a ciò diminuendosi il moto del grave dall' ostacolo della resistenza, e per conseguenza la sua celerità eziandio, dovrà però la Centripeta nominata, per quella relazione, che nel moto ottiene, soffrire alcuna variazione, laonde una tal quale azione pure anche, riguardo a tal parte, patisce ancora ella.

S C O L I O.

591. Le potenze, siccome altrove si fece, in due aspetti nel moto presente riguarderannosi; cioè e dirette paralelle fra loro, come ad un piano stesso, e dirette ad un punto, cioè al Centro non paralelle; il che ci porge anche il modo d'esaminar le loro trattazioni in due Capi, nel primo de' quali la prima ipotesi, e nel secondo la seconda discuteremo. Tra tanto si premetterà quanto è necessario per le teorie seguenti, e dipoi alle solite ricerche, ed indagini a questo cotal moto spettanti, farem passaggio.

L E M M A I.

Assegnar l'espressione, o sia canone della forza Centripeta, e Tangenziale insieme.

592. Prendasi che AE sia la Curva dal projetto Tav.13. Fig. 2. descritta, e ch' in D ritrovisi dal punto A partito, le di cui forze paralelle fra loro verso il piano AP dirette sieno; si chiami $AP = x$ e $PD = y$, tirata la infinitamente vicina CE, verrà quindi $DS = dx$, ed $ES = dy$, e $DE = ds$ differenziale della Curva; nel

pun-

punto detto D pongasi, che sia la forza sua $DL=f$, condotta la perpendicolare LH, verrà secondo il solito, risoluta la medesima nella Centripeta DH, e nella Tangenziale LH. Son simili i triangoli DSE, DHL, e perciò la proporzionalità sarà di $ds : dy :: f : LH$; vale a dire, la tangenziale $LH = \frac{fdy}{ds}$; e questo è il caso della salita da A fino in O, dove dal piano discotasi il grave.

593. Se poi dall'altra parte scorra, e che al piano delle forze s'accosti, vedesi ch'il differenziale dy è negativo, posciachè per esso l'applicata y scema, e perciò col discorso medesimo, si ha $LH = \frac{-fdy}{ds}$.

594. La stessa similitudine de' triangoli ci dà ancora $f : DH :: ds : dx$, cioè la forza Centripeta $DH = \frac{fdx}{ds}$; e ciò succede tanto da una parte, che dall'altra, attesochè dx sempre positivo rimane.

COROLLARIO I.

595. Milita sempre, che questa accennata Centripeta equilibrio faccia con la Centrifuga, cioè ch' eguali fra loro sieno, scorrendo il grave la Curva, e perciò questa seconda essendo ella espressa num. 448. con $\frac{uu}{r}$, avrem perciò $\frac{fdx}{ds} = \frac{uu}{r}$; principio, che più volte avverrà d'applicare.

COROLLARIO II.

596. Il raggio dell'osculo al num. 456. ritrovato

to in questa stessa ipotesi di forze paralelle, egli avrà parimente luogo: Onde $r = \frac{b\,dy}{dp}$ sarà canone da usarsi, il quale surrogato in vece dell' r nella precedente equazione, riesce $\frac{f\,b\,dy\,dx}{dp\,ds} = uu$.

COROLLARIO III.

597. Per la costruzion della Curva, quale sempre è la stessa del num. 458. e che la Centripeta fu, num. 459. $\frac{fp}{b} = \frac{uu}{r}$, sarà pur vera al presente, quindi ponendovi il valore del citato raggio, hassi $\frac{fp\,dy}{dp} = uu$.

COROLLARIO IV.

598. L' equazione $p = \frac{b\,dx}{ds}$ num. 457. stabilita; sarà messa in uso pure anche; laonde premesse le necessarie posizioni, procederemo avanti.

PROBLEMA GENERALE.

Nel mezzo resistente qualunque movendosi il projetto, determinare le leggi di tal movimento.

599. La costruzione stessa della fig. precedente restando, con di più ch' al solito la resistenza $= R$, non v' ha dubbio che le solite leggi, e formule delle forze dovrannosi quì pure anche applicare. Perciocchè prendendo ad esaminar la salita da A, verso D, la forza tangenziale dovrà avervi il rapporto, poichè in virtù d' essa si spin-

ſi ſpinge il mobile, allontanar facendolo dal piano delle forze, o aſſe AP; e perciò diminuirannoſi le velocità dello ſteſſo, ſiccome fu notato altre volte. La reſiſtenza dall' altro canto produce col ſuo impedire l' effetto medeſimo; onde è che d' ambedue compoſta ſarà l' azion totale del ritardamento. Quindi la forza tangenziale ritenendo la ſteſſa direzion del moto, ſi moltiplicherà al ſolito nello ſcorſo ſpazio, ch' al fatto noſtro ſi è l' elementare ds della Curva, e però $\overline{\frac{fdy}{ds} + R}$ $\times ds = - udu$, cioè $fdy + Rds = - udu$, e varrà per la ſalita.

600. Nell' accoſtarſi poi, che dall' altra parte ei ſuccede, la tangenziale l'accelera, e la reſiſtenza ſempre ritarda; dunque la potenza intiera motrice; e cagione dell' acceleramento, ſarebbe $\frac{fdy}{ds} - R$; ma num. 593. la tangenziale accennata reſulta negativa, dunque dovrà pure anche variarſi il ſegno alla reſiſtenza, acciocchè la natura del moto ſi conſervi, e così $\overline{-\frac{fdy}{ds} + R} \times ds = udu$, cioè $fdy - Rds = - udu$, ed abbracciando ambedue i caſi in una formula, avremo $fdy \pm Rds = - udu$.

601. A norma del moto rettilineo ſi procederà nelle reſiſtenze ancora adeſſo, poichè ſi tien che reſiſtaño in ragion delle velocità a qualche dignità elevate, con le Denſità compoſte, cioè $R = u^n D$; quindi è che l' antecedente equazione diverrà $fdy \pm u^n D ds = - udu$.

CO-

COROLLARIO I.

602. Avendosi $\frac{f\,dx}{ds} = \frac{fp}{b} = \frac{uu}{r}$ num. 597. differenziando, sarà $\frac{1}{2}\,d\left(\frac{rf\,dx}{ds}\right) = \frac{1}{2}\,d\left(\frac{rfp}{b}\right) = u\,du$, il che servirà per ottenersi le celerità per ogni minimo spazietto acquistate.

COROLLARIO II.

603. Resta sempre fisso che $dt = \frac{ds}{u}$; perlochè la velocità del coroll. antecedente ponendovi, risulta che $dt = \frac{ds^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{rf\,dx}}$, e varrà egli per la ricerca del tempo.

COROLLARIO III.

604. Assunto il canone $f\,dy \pm u^n D\,ds = -u\,du$, ed in vece delle velocità surrogandovi il loro valore num. 602. riesce $f\,dy \pm u^n D\,ds = -\frac{1}{2}\,d\left(\frac{rf\,dx}{ds}\right)$, equazione in cui vi è racchiusa la natura della Curva, secondo le date Ipotesi.

COROLLARIO IV.

605. Essendo $f = \frac{uub}{pr}$, num. citato sostituendo in quella del num. 601. in luogo della forza, n'avremo

uubdy

$\frac{uubdv}{rp} \pm u^n Dds = - udu$; ed in oltre ponendovi ancora il valore del raggio num. 596. convertiraffi in $\frac{uudp}{p} \pm u^n Dds = - udu$; e farà altra efpreffione per maneggiarfi il prefente moto, e dove ogni fpecie di qualfifia potenza comprendefi; la quantità p già data intendendofi per le fue affunte funzioni.

COROLLARIO V.

606. L'efpreffa precedente formula ci addita chiaramente, che fecondo che le refiftenze, cioè $R = u^n D$, faran pofte in qualche ragione delle velocità, come pure fecondo l'ipotefi delle Denfità, potraffi integrar la medefima, il che in qualche fatto particolare vedremo.

COROLLARIO VI.

607. Dalla citata penultima equazione, fi può fare fvanire la finita, ed infinitefima quantità p, e dp, mentre num. 598. effendo $p = \frac{bdx}{ds}$, differenziando nuovamente, ritenendo dx coftante, haffi $dp = \frac{-bdxdds}{ds^2}$; ficchè furrogandone i valori, avremo $\frac{-uudds}{ds} \pm u^n Dds = - udu$; la quale farà ridotta alle fole funzioni di ds, e che fecondo i cafi potraffi integrare.

SCOLIO.

608. Le precedenti fiffate regole, che allo fcio-

gli-

glimento delle quiſtioni ſervirannoci, ſiccome vedeſi, racchiuderanno in ſe ſteſſe ſempre la ſeconda differenza, o dell' una, o dell' altra variabile. Due volte pertanto per aver le quantità in termini finiti ſarebbe d' uopo integrare, il che non avendoſi per far ciò generalmente il modo, ci aſterremo di trattar tutti i caſi, reſtringendoci a quei pochi, che lo ſcioglimento più chiaro contengono. Le poſizioni hanno altresì, riguardo a queſta parte, maggiore eſtenzione, avvegnachè nella conſiderazion loro, oltre alle potenze, e coſtanti, e variabili, entrino eziandio le reſiſtenze a queſta ſteſſa legge ſottopoſte.

CAPITOLO II.

Del Moto Curvilineo nel mezzo reſiſtente, in cui le potenze del grave han le direzioni parallele fra loro.

Siccome per l' avanti ſi è praticato, così anche adeſſo in due aſpetti, per rapporto alla tendenze loro, ſaranno aſſunte le forze, e paralelle, e dirette non parelle ad un punto; come parimente la conſiderazione d' eſſer coſtanti, e variabili riterremo, ſciogliendone al ſolito le dirette, ed inverſe quiſtioni.

PROBLEMA I.

Le forze del projetto ſtando coſtanti, e fra loro tendenti parallelle, e le reſiſtenze reſiſtano come i quadrati delle velocità, ma ſieno ſempre uniformi, o vogliam di-

re le densità costanti, ritrovare la Curva descritta.

Tav. 13. Fig. 3. 609. Dal punto A salito in D il projetto, costruito essendo come nella figura precedente, giacchè per l' ipotesi viene $R = u^2$, perchè $D = 1$, avremo in tal caso dalla formula num. 601. $-fdy - u^2 ds = udu$; e siccome si ha $\frac{rfdx}{ds} = uu$ num. 602. sarà parimente $\frac{1}{2} d \left(\frac{rfdx}{ds}\right) = udu$, e però surrogando tali valori, per esser pure $f = 1$, risulterà $-dy - rdx = \frac{1}{2} d \left(\frac{rdx}{ds}\right)$. Di più num. 596. si è $r = \frac{bdy}{dp}$, onde pure anco sostituendo, si ha finalmente $\frac{-dp\,dy - bdx\,dy}{dp} = \frac{1}{2} d \left(\frac{bdydx}{dpds}\right)$, in cui, per aversi data la differenza dp dalle sue funzioni, verrà quivi racchiusa la Curva cercata.

610. S' otterranno le velocità dall' equazione num. 605. al caso della salita applicata, che è $\frac{-uudp}{p} - u^n D ds = udu$; e giacchè richiede la condizione d' essere $D = 1$, ed $n = 2$, ne risulta dunque $\frac{-dp}{p} - ds = \frac{du}{u}$, cioè $-ds = \frac{dp}{p} + \frac{du}{u}$, dove integrando viene $lup = -s + A$. Si stabilisce la costante come al solito, posciachè la costruzione medesima sempre s' intende, cioè del triangolo nel principio del moto num. 458. così egualmente delle quantità stesse; onde ivi sta $u = U$, e $p = P$, ed $s = o$; così che $lUP = A$, e perciò $l\frac{up}{UP} = -s$, e col ridurre a' logaritmi iperbolici, facendo

do $lq = 1$, riesce $u = \frac{PU}{pq^t}$.

611. Nell' equazion del tempo $dt = \frac{ds}{u}$ surrogata la celerità precedente, risulta $dt = \frac{pq^t ds}{PU}$.

C O R O L L A R I O I.

612. Il valore di $p = \frac{bdx}{ds}$ num. 598. sostituendo nella proposta velocità, verrà allora $u = \frac{PUds}{bq^t dx} = \frac{PUq^{-t}ds}{bdx}$; e nel tempo parimente quì sopra sostituendo la medesima, sarà $dt = \frac{bq^t dx}{PU}$.

C O R O L L A R I O I.

613. Ricavasi num. 597. che $u^2 = \frac{fpr}{b}$, quindi in vece del raggio $r = \frac{bdy}{dp}$ surrogando, riducesi che $u^2 = \frac{fpdy}{dp}$, e di nuovo in luogo di $p = \frac{bdx}{ds}$ num. già cit. siccome la sua differenza, la quale è, ritenendo dx costante, $dp = \frac{-bdxdds}{ds^2}$, sostituendo, ricavasi $u^2 = -\frac{fdyds}{dds}$. In oltre è $u^2 = \frac{P^2U^2q^{-2t}ds^2}{b^2dx^2}$ num. 612. quindi si ridurrà che $-\frac{fdyds}{dds} = \frac{P^2U^2q^{-2t}ds^2}{b^2dx^2}$, cioè

$U^2 P^2 q^{-2f} = -\frac{b^2 f dy dx^2}{ds dds}$; e giacchè $ds^2 = dy^2 + dx^2$ dal differenziale d' ogni Curva, e però fatto dx costante, e differenziando nuovamente, verrà $dy ddy = ds dds$, sicchè anche tal valore ponendovi, vien finalmente $-fq^{2f} dx^2 = \frac{U^2 P^2 ddy}{b^2}$, in cui la natura della Curva contiensi.

COROLLARIO III.

614. Siccome abbiam visto nel Corollario precedente, ch' egli è $\frac{U^2 P^2 ds dds}{b^2 dy} = -fq^{2f} dx^2$, se però facciasi $dx = z ds$, e sempre dx costante, passando alle seconde differenze, sarà dipoi $-\frac{dz ds}{z} = dds$; come altresì da tale ausiliare equazione, per aversi $ds^2 = dx^2 + dy^2$, risulterà $dy = ds\sqrt{1 - zz}$; laonde i respettivi valori surrogati, formasi $\frac{U^2 P^2}{b^2} \times \frac{dz}{z^3\sqrt{1 - zz}} = fq^{2f} ds$, dove vedesi esser ridotta l' equazione a differenziale del primo ordine per potersi dalla medesima costruire la Curva.

COROLLARIO IV.

615. Nel Coroll. II. abbiam posto pure, che $u^2 = -\frac{fdyds}{dds}$, e però differenziando altra volta, senza assumere alcuna flussione costante, perchè può farsi $f = 1$, verrà

terrà $udu = \frac{-dydds^2 - dsddydds + dydsdddds}{2dds^2}$. Nella ſuppoſizion del Problema, fu ſopra $-fdy - u^2 ds = udu$, ſicchè ponendovi il valore d' u^2, e l' altro della già eſpreſſa ſua differenza, haſſi $-dy + \frac{dyds^2}{dds} = \frac{-dydds^2 - ddydsdds + dydsd^3s}{2dds^2}$, ovvero fatta la neceſſaria riduzione, $-dydds^2 + 2dyds^2dds = -ddydsdds + dydsd^3s$, equazione eſſa ancora, che in ſe contiene la natura della Curva, ma con le differenze del terzo ordine, ſiccome ſi ſcorge.

C O R O L L A R I O V.

616. Ripigliando l' equazione poco fa eſpreſſa $u^2 = \frac{-fdyds}{dds}$, poichè, ſiccome abbiam viſto num. 613. $\frac{dyddy}{ds} = dds$, onde ſoſtituendo per dds, riduceſi $u^2 = \frac{-fds^2}{ddy}$; di più differenziando di nuovo, ſarà $udu = \frac{-2fdsddsddy + fds^2dddy}{2ddy^2}$, ed in vece di $dsdds$ altra volta ponendovi il valore, converteſi in $udu = -fdy + \frac{fds^2dddy}{2ddy^2}$; quì riaſſumendo il canone proprio $-fdy - u^2ds = udu$, e ſoſtituendovi tanto le velocità u^2, che la loro differenza, vien finalmente $-fdy + \frac{fds^3}{ddy} = -fdy + \frac{fds^2dddy}{2ddy^2}$, cioè $2dsddy = dddy$, la quale è equazione più ſemplice, sì ben che la terza differenza contenga.

CO-

COROLLARIO VI.

617. Si potrà più semplice ridurre ancora, ponendo che $dy = zdx$, e però $ddy = dzdx$, e dx restando costante, col differenziare altra volta, è allora $dddy = dxddz$, e perciò $dsdzdx = dddy$, vale a dire $dsdz = ddz$, col sostituire in luogo di $d^3 y$. Di più facciasi $dx = \frac{dz}{q}$, e però $dqdx = ddz$, talchè viene surrogando, $dsdz = dqdx$; ma $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ci porge $ds = dx\sqrt{1 + z^2}$, e così $dz\sqrt{1 + z^2} = dq$, cioè integrando, risulterà poi $q = \int dz\sqrt{1 + z^2}$ in primo luogo. Questo valore di q surrogato in oltre nell'altra $dx = \frac{dz}{q}$, ci dà secondariamente integrando ancora, $x = \int \frac{dz}{\int dz\sqrt{1 + z^2}}$. In terzo luogo perchè è qui sopra $dy = zdx$, verrà $y = \int \frac{zdz}{q} = \int \frac{zdz}{\int dz\sqrt{1 + z^2}}$; quale è ridotta, siccome si è detto più semplice, rispetto alle differenze, ma però di niun uso per la costruzione intrigata, quantunque dalla z l'incognite dell'equazione date ci vengano.

Dall'aversi trattata la salita sapremo coll'istesso metodo, e facilità maneggiare l'altra formula della scesa, e perciò sarebbe superfluo l'estendersi su ciò da vantaggio.

SCOLIO.

618. Il moto fin ora esaminato, cioè della forza costante, e le resistenze uniformi come i quadrati delle

delle velocità, può egli perfettamente convenire a quei movimenti, ch'a nostra vista, sopra la superficie della Terra si fanno; posciachè la resistenza come tale con le velocità, dall'esperienza è provato, ch'ella è quella che in natura ha per appunto luogo; di più a piccioli spazj il projetto riguardandosi mosso, non v'ha dubbio, che prender potremo la potenza sempre fornita del valore medesimo; e l'aria altresì dove egli si move sarà quel fluido, che se non è propriamente uniforme, prossimamente però ad esser tale potrassi assumere. Su tal riflesso distesamente, ed in più forme è stato questo Problema trattato da valentissimi Matematici, come sarebbe dal Kellio, da Giovanni Bernoulli, dall'Ermanno, dall'Eulero, e ne' Commenti del Newton dal Padre Jacquier, e le Seur, la soluzion de' quali ultimi con i loro principj, e metodi maneggiata, concorda, ed alla presente simile risulta.

P R O B L E M A II.

Rimanendo fisse le condizioni dell'antecedente Problema, che la forza sia costante, e la resistenza uniforme, ma che nella ragion semplice delle velocità resista, trovare la Curva, e l'altre affezioni del moto.

619. Trattandosi della salita, e la fig. precedente avendo luogo, giunto in D il projetto, perchè $n=1$, e $D=1$ parimente, la formula nota riescirà $-fdy-uds=udu$; siccome $u^2=-\frac{f\times ds^2}{ddy}$ num. 616. e però facendo $-f=1$, viene $fdy+\frac{ds^2}{\sqrt{ddy}}=-udu$; di più, è num. cit. $-udu=\frac{2fdsddsddy-fds^2dddy}{2ddy^2}$, ov-

ovvero, in vece di $dsdds$ furrogando, $-udu = fdy - \frac{fds^2 dddy}{2ddy^2}$, quindi ponendovi in tal formula per le velocità differenziate, hassi $fdy + \frac{ds^2}{\sqrt{ddy}} = fdy - \frac{fds^2 dddy}{2ady^2}$, o sia $\frac{2}{\sqrt{ddy}} = \frac{-fdddy}{ddy^2}$, cioè $2ddy^{\frac{3}{2}} = -d^3y$; che sarà l'equazione per la Curva cercata.

620. La velocità può ricavarsi dall'equazione del num. 605. $\frac{uudp}{dp} + u^n Dds = -udu$, ch'adattata al supposto, viene $\frac{udp}{p} + ds = -du$; e sostituendovi in vece delle velocità $u = \frac{ds}{\sqrt{ddy}}$, e $\frac{bdu}{ds}$ in luogo di p, come pure l'altro valore di $dp = -\frac{bdxdds}{ds^2}$ num. 613. integrando avremo $\int\frac{-dds}{\sqrt{ddy}} + s = -u$.

621. E così il tempo sarà $dt = \frac{ds}{u} = \frac{ds}{\int\frac{dds}{\sqrt{uay}} - s}$, intendendosi sempre doversi aggiunger la necessaria costante.

S C O L I O.

622. L'indagare le Curve, seguendo altre ipotesi, lo reputo superfluo, attesa la difficoltà sopra addotta di non esser l'equazioni riducibili, per costruirsi le medesime; onde è ch'alle inverse quistioni farò passaggio. Il Problema seguente con ogni estenzione dal Newton ne' Principj di Matematica nella Sez. 2. Proposiz. 10. è stato

to trattato. Il più volte ricordato Bernoulli negli Atti di Lipsia, e di poi riportato nell' Opere sue, del tom.4. num. 181. degni ritrovati vi scorperse, egli pure sciogliendolo. L' Eulero parimente nel tom. 1. Cap. 6. Prop. 111. elegantemente l' ha sciolto, e la di cui soluzione, benchè con dati diversi, con la seguente, ch' ora proporremo, giustamente conviene.

PROBLEMA GENERALE.

Data la Curva dal projetto descritta, e la potenza uniforme tendente al pian delle forze pur data, assegnare la resistenza del mezzo, la densità, velocità, e tempo, in un qualsisia punto di essa.

623. Rimanga sempre fisso che $AP = x$, $PD = y$, Tav.13. e $DE = ds$, come parimente $R = u^n D$, e prendasi la Fig. 3. salita, avrassi perciò $-fdy - Rds = udu$. Il principio della forza Centripeta alla Centrifuga eguale sta sempre fermo, onde num. 613. $u^2 = \frac{fpr}{b}$, che di poi riducesi in tal forma $u^2 = -\frac{fds^2}{ddy}$ num. 619. siccome anche differenziata nuovamente, è $udu = -fdy + \frac{fds^2dddy}{2ddy^2}$, num. citato, perlochè mettendovi in cambio delle velocità, risulta la formula $-fdy - Rds = -fdy + \frac{fds^2dddy}{2ddy^2}$, cioè $R = -\frac{fdsdddy}{2ddy^2}$, la quale sarà l' espressione generale per ritrovarsi la resistenza nel salir del projetto.

624. Ed assumendo l' altra per la scesa $fdy - Rds = -udu$, riesce $R = \frac{fdsdddy}{2ddy^2}$.

625. La velocità sempre si ha dalla nota espressione $u^2 = -\frac{fds^2}{ddy}$, posciachè si pone adesso, che data abbiamo la Curva descritta.

626. La densità, d'allorchè costante non è presa, ottiensi dal ricordato canone $R = u^n D$, assegnando gli arbitrarj valori alla dignità n; quindi supponendo per ora col Newton quella posizione, che vera si tiene in natura, cioè $n = 2$, producesi $D = \frac{R}{u^2}$; avvegnachè num. 623. e 624. abbiasi per ambedue l'ipotesi, $R = \mp \frac{fdsdddy}{2ddy^2}$, siccome dal precedente num. eziandio la velocità, e però $D = \pm \frac{dddy}{2dsddy}$ sarà la sua generale espressione, in cui il segno positivo varrà per la salita, e l'altro per la scesa.

627. Vien pure, per essere egli $u = \frac{\sqrt{fpr}}{\sqrt{b}}$, $dt = \frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{fpr}}$, cioè il tempo scorso; ovvero siccome si è notato sopra, che $u = -\frac{fds^2}{ddy}$, fattasi $-f = 1$, riescirà $dt = \sqrt{ddy}$; e saranno tutte le generali espressioni ch' hanno luogo in cotal movimento; laonde alle varie supposizioni di Curve date farem passaggio, per dedurne, secondo il solito i necessari rapporti.

ESEM-

E S E M P I O I.

628. Supponggasi AF esser la Parabola ordinaria, Tav.13. e quella tal Curva, che data si prende, il di cui Fig. 4. vertice C, e $CQ = c$ il suo asse, siccome $AQ = a$. Nominata sempre $AP = x$, e $PB = y$, verrà perciò $PQ = a - x$, e $CD = c - y$; se il parametro facciasi $= k$, risulterà l'equazione $kc - ky = \overline{a - x}^2$; onde differenziando, $-kdy = -2adx, + 2xdx$; e di più differenziata di nuovo, dx restando costante, riescirebbe $-kdddy = o$, quindi sostituendo in $R = \mp \frac{fdsdddy}{2ddy^2}$, espressione della resistenza per ambi i casi, avrebbesi la medesima resistenza $R = o$, vale a dire nulla, cioè come nel vacuo succede. Sicchè con forza costante, acciocchè nella parabola s'effettui il moto, nel vacuo deve lo stesso farsi, conforme notato venne sopra, e siccome ritrovò il Galileo, il Newton dipoi, ed altri.

Sarebbe inutile il ricercarsi le densità, posciachè $= o$, pure anche risulterebbero; e giustamente, mentre dove non havvi resistenza, non può necessariamente esservi la densità alla stessa inerente.

629. Per aversi $u^2 = \frac{-fds^2}{ddy} = \frac{-f \times \overline{dx^2 + dy^2}}{ddy}$, ricaverassi la celerità; mentre dall'equazione sopra notata risultando $dy^2 = \frac{4a^2dx^2 - 8axdx^2 + 4x^2dx^2}{k^2}$, che così poi $ds^2 = \frac{dx^2}{k^2} \times \overline{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4x^2}$, siccome $ddy = \frac{-2dx^2}{k}$, perciocchè sostituendo i predetti va-

 lori

lori, e facendo $f=1$, n' esce $u^2 = \frac{k^2+4a^2-8ax+4xx}{2k}$, di cui si può dedurne anche il tempo, osservando il solito metodo.

ESEMPIO II.

630. Quando che la Curva nominata non fosse la Parabola ordinaria, ma d' ordine superiore, e per esempio del terzo grado, affinchè sia più spedito il Calcolo pongasi $c-y=t$, ed $a-x=z$, così che la di lei equazione divenga $k^2t=z^3$; onde poi $k^2dt=3z^2dz$; fatta la differenza dz costante, si ha $ddt=\frac{6zdz^2}{k^2}$; e la terza differenza, $dddt=\frac{6dz^3}{k^2}$. E' pure $-dy=dt$, e $-dx=dz$, quindi sostituendo queste flussioni per quelle, verrà primieramente $dy=\frac{3z^2dx}{k^2}$: per la seconda, $-ddy=\frac{6zdx^2}{k^2}$: e per la terza, $d^3y=\frac{6dx^3}{k^2}$, come anche $ds=\frac{dx}{k^2}\sqrt{k^4+9z^4}$; imperocchè surrogando i respettivi valori nella resistenza, e per il caso della salita, risulta $R=\frac{-f\sqrt{k^4+9.\overline{a-x}^4}}{12\times\overline{a-x}^3}$.

631. La densità parimente per tal supposto, ch' è $D=\frac{dddy}{2dsddy}$, riescirà $D=\frac{-k^2}{2\times\overline{a-x}\sqrt{k^4+9\times\overline{a-x}^4}}$.

632.

632. Risulta pure $u^2 = \frac{f}{6k^2} \times \frac{k^4 + 9 \cdot \overline{a-x}^4}{a-x}$, ponendovi gli stabiliti valori di poco anzi; siccome ancora il tempo, $dt = \frac{ds\sqrt{6k^2 \times \overline{a-x}}}{fk^4 + 9f \times \overline{a-x}^4}$.

633. Applicandosi al fatto della scesa, cioè in $R = \frac{fdddyds}{2ddy^2}$, ne viene allora $R = \frac{f\sqrt{k^4 + 9 \cdot \overline{a-x}^4}}{12 \cdot \overline{a-x}^2}$; siccome la densità $D = \frac{-dddy}{2dsddy} = \frac{k^2}{\overline{2a-2x}\sqrt{k^4 + 9 \cdot \overline{a-x}^4}}$. vale a dire che tanto la resistenza, che la densità positive diverranno; la velocità altronde sempre è la stessa in ambedue gli archi di Curva, siccome parimente accade del tempo.

S C O L I O.

634. Dalle due esaminate ipotesi, cioè dal salire, e scender del mobile, hassi notato che nella prima la resistenza negativa, e nella seconda positiva risulta. Riguardo alla prima pertanto, egli è fuor di dubbio, ch' il movimento si rende impossibile di fatto, siccome notò giustamente il Newton nella seconda edizione dell'Opere de' Principj della Filosofia naturale, ritrattandosi avvertito dal Bernoulli. E la ragione pure anche ciò evidentemente dimostra, mentre parlandosi d' accelerazione di moto, in Natura questo non può esistere, quando accelerar debbasi da una Resistenza che negativa ella sia.

Per

Per ciò succedere sarà necessario, che da mezzo impediente, in repulsivo ei convertasi, siccome realmente fatto abbiamo fissandone dello scendere il respettivo canone num. 600. Dunque ogni volta ch' occorrerà di vedere, col maneggiar le quistioni in seguito, che negativa tanto la resistenza, che densità risulta, fisicamente dovrà riputarsi, che il moto supposto non è possibile; e poichè sempre avverrà che questo da l' un degli archi della data Curva succeda, o sia ciò nel salire, ovver nello scendere, quindi conchiuder potrassi, che nemmeno in natura è possibile due archi simili di Curva descriversi dal grave in effetto.

ESEMPIO III.

Tav.13. Fig. 5. 635. Ponendosi essere il Circolo la Curva data, del raggio $QC = a$, stando sempre $AP = x$, e $PB = y$, avrassi l'equazion sua, conforme è noto, $2ax - xx = yy$; onde passando alle differenze, $adx - xdx = ydy$, e stando al solito costante dx, $dx^2 = -dy^2 - yddy$, sicchè per la prima, sarà $dy = \frac{adx - xdx}{y}$, e per la seconda, $ddy = \frac{-dx^2 - dy^2}{y}$, e per la terza $dddy = \frac{-3dyddy}{y}$; e per esser sempre $ds^2 = dx^2 + dy^2$, surrogando in cambio di dy^2, che si ha dall' equazione, verrà pure $ds^2 = \frac{dx^2}{y^2} \times \overline{y^2 + a^2 - 2ax + xx}$, e di più in vece di y^2 sostituendo anche, riducesi che $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, che sono tutte le espressioni necessarie da intro-

introdursi nell' affezioni solite.

636. Sarà dunque la resistenza d' allorchè sale, $R = -\frac{fdsd^3y}{2ddy^2} = \frac{-fadx}{\sqrt{2ax-xx}} \times \frac{-3dyddy}{2ddy^2\sqrt{2ax-xx}}$ $= \frac{3fadx}{2\times 2ax-xx} \times \frac{dy}{ddy}$; e perchè deducesi pur anco che $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$, e $ddy = \frac{-aadx^2}{2ax-xx^{\frac{3}{2}}}$, onde si ritrova $R = -\frac{3f}{2a}\times\overline{a-x}$; ed essendo $BD = PQ = a-x$, e $QA = a$, ed $f = 1$, avremo perciò finalmente $R = \frac{-3BD}{2QA}$.

637. La densità verrà altresì $D = \frac{dddy}{2dsddy} = -\frac{3dy}{2yds} = -\frac{3}{2a} \times \frac{a-x}{\sqrt{2ax-xx}} = \frac{-3PQ}{2PB\times AQ}$, e ciò per esser $PB = \sqrt{2ax-xx}$, ed il restante come nel precedente num.; quindi scorgesi che per tal fatto della salita sono ambedue negative, e però, come abbiam detto impossibile il movimento.

638. Prendendosi lo scender da C verso F, è allora $R = \frac{fdsdddy}{2ddy^2} = \frac{3BD}{2QA}$, surrogandovi gli stessi valori dell' altro caso; e la densità parimente è $D = \frac{3PQ}{2PB\times AQ}$, vale a dire che positiva sì l' una che

l' al-

l' altra riesce, cioè negativa ciascheduna d' esse alle precedenti, assumendosi la PQ, e BD dall'altra parte, ch' al centro s'accosta il mobile; onde è che pel solo quadrante CF si potrà il moto descrivere.

639. Per ambedue i casi sta fissa l'espressione della velocità $u^2 = \frac{-f ds^2}{ddy}$, e perciò sostituendovi i sopranominati espressi valori, num. 635. si ridurrà in $u^2 = \frac{-faadx^2 \times \overline{2ax - xx}^{\frac{1}{2}}}{-aadx^2 \times \overline{2ax - xx}} = f\sqrt{2ax - xx}$; cioè facendo $f = 1$, $u = \sqrt{PB}$.

640. Il tempo eziandio viene $dt = \frac{ds}{\sqrt{PB}}$, e conducendo l' infinitamente vicina OS, sarà allora $BS = ds$, sicchè $dt = \frac{BS}{\sqrt{PB}}$; ovvero volendo surrogarvi invece dell' archetto ds, il di lui valore sopra num. 635. stabilito, riescirà $dt = \frac{adx}{\sqrt{PB}\sqrt{2ax - xx}} = \frac{adx}{PB^{\frac{3}{2}}}$; le quali inferite tutte quantità le stesse sono, che dal Newton, col metodo suo ritrovate furono, nella più volte citata Opera; dal Bernoulli parimente con elegantissimo metodo; e dall' Eulero eziandio, i quali tutti per esteso tal Problema han trattato.

COROLLARIO I.

641. In altra maniera le soprannominate illazioni dedur

dedur potrannosi dalla data Curva; avendosi $r = \frac{b\,dy}{dp}$ num. 609. se introdurremo il valore di $dp = -\frac{b\,dx\,dds}{ds^2}$ num. 620. risulterà $r = \frac{-dy\,ds^2}{dx\,dds}$, e $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$ pure anche sostituito, si è poi $r = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$. Restando dx costante, e differenziata questa equazione, verrà $dr = \frac{-3ds^2\,dds\,ddy + ds^3\,dddy}{dx\,ddy^2}$, dove ponendo in vece di dds, e riducendo, e dividendo per 2, riesce così $\frac{dx\,dr + 3ds\,dy}{2ds^2} = \frac{ds\,dddy}{2ddy^2} = \mp R$, num. 623. ciò posto al caso presente, ove parlasi del circolo, è sempre costante il raggio dell' osculo, dunque la sua differenza vien nulla; sicchè in $\mp R = \frac{dx\,dr + 3ds\,dy}{2ds^2}$, riesce $\mp R = \frac{3dy}{2ds}$. Si ha per valore ricavato dall' equazione, $dx^2 = \frac{y^2\,dy^2}{a^2 - 2ax + xx}$, e però in $ds^2 = dy^2 + dx^2$ sostituendo, sarà $\frac{dy}{ds} = \frac{a-x}{a}$: imperocchè risulta $\mp R = \frac{3 \times \overline{a-x}}{2a} = \frac{3BD}{2QA}$, cioè la resistenza come poco anzi.

COROLLARIO I.

642. Coll' averſi $u^2 = \frac{f r d x}{d s}$ num. 595. e perchè nel circolo il raggio è coſtante $= a$, diverrà $u^2 = \frac{f a d x}{d s}$; e ſiccome dal metodo del num. precedente ricavaſi $\frac{d x}{d s} = \frac{\sqrt{2 a x - x x}}{a}$, quindi reſtando $f = 1$, viene la celerità $u^2 = \sqrt{2 a x - x x}$, cioè $u = \sqrt{BP}$, parimente come ſopra.

COROLLARIO II.

643. La denſità potremo averla così, cioè avendo dal ſuppoſto che egli è $D = \frac{R}{u u}$, e dal num. 641. $\mp R = \frac{3 d y}{2 d s}$, come pure dal Coroll. I. $u^2 = PB$, quindi intromettendovi tali valori, rieſce $\mp D = \frac{3 d y}{2 d s P B} = \frac{3 \times \overline{a - x}}{2 a \times P B} = \frac{3}{2} \times \frac{B D}{A Q \times P B}$, cioè la ſteſſa, ſiccome abbiam detto.

COROLLARIO III.

644. Quando in C, ſommità della periferia, giunto ſia il projetto dal punto A ſalendo, haſſi che $BD = o$, e però la reſiſtenza diviene $- R = o$; cioè rilevaſi come

me ſe nel vacuo ei ſcorreſſe, mentre nulla ſi è la reſiſtenza. Ed in fatti dovendo dal moto della ſalita, ch'impoſſibile abbiam viſto egli eſſere, trapaſſare il grave ad altro moto, che negativo è del medeſimo, cioè al poſſibile, ſucceder dee neceſſariamente, che eguale a zero diventi tal quantità; e quello che ſi dice della reſiſtenza, applicar lo poſſiamo alla denſità pure, come di fatto dall' eſpreſſa formula ricavaſi, mettendo a conto un tal ſuppoſto.

COROLLARIO IV.

645. Nel prefato punto C vien parimente $PB = CQ$, ſicchè ſoſtituendo nella velocità ſopraccennata, haſſi $u = \sqrt{CQ}$, cioè coſtante. Se in A, ed in F pongaſi eſſere il grave, rieſce poi $PB = o$, quindi parimente $u = o$.

COROLLARIO V.

646. Dunque in F, quando $u = o$ ſi è ritrovato, ſe di poi debba oltrepaſſare tal punto per continuare il movimento, poſciachè viſto abbiamo ch' all' applicata PB riſulta la celerità proporzionale, eſſendo noto nel cerchio, che preſa dall' altro mezzo circolo, negativa ella diviene, ſarebbe perciò $u = \sqrt{-BP}$, cioè immaginaria, e però ſignificherà che ei non è poſſibile, che tal punto oltrepaſſi col muoverſi.

COROLLARIO VI.

647. Stabilito si è pertanto, che salendo pel quadrante AC il projetto, negativa divenga tanto la Resistenza, che la densità del Mezzo, e perciò impossibile fisicamente il moto per esso, siccome pure anche notato abbiamo al num. 634. Di più secondo l' avvertimento ivi prefisso, venendo affette di un segno nella salita, nello scendere dovrà poi a contrario avvenire; il che scorgesi parimente dal modo delle trattate presenti quistioni, mentre la retta QP dall' altra parte del quadrante CF, di segno contrario all' altra PQ dell' altra banda, risulta; conforme è chiaro per le regole dell' Algebra; e però siccome abbiam detto impossibile riescendo nel Circolo la salita, sarà così possibile la discesa. Ad altri casi faremo adesso passaggio.

ESEMPIO IV.

Tav. 13. Fig. 6. 648. La Curva data AHF, sia l'Iperbola, descritta col centro C, ed H il suo vertice, diametro trasverso $2a$, e conjugato $= 2c$; ed al solito $AP = x$, e $PB = y$. In oltre abbiasi pure $DC = z$, $BD = q$, supposte per brevità equilatere l' Iperbole, sappiamo esser l' equazione $zz - aa = qq$, come altresì $zdz = qdq$; ritenendo per costante dq, passando a differenziar nuovamente, avremo $dq^2 = dz^2 + zddz$, ovvero $\frac{dq^2 - dz^2}{z} = ddz$; e differenziando per la terza volta, sarà $o = 2dzddz + zdddz + dzddz$, cioè $dddz = -\frac{3dzddz}{z}$.

Si

Si noti anche che data vien la QC, e ſi chiami $= b$, ſiccome la data pure $AQ = n$; e però avremo $PB = y = b - z$, e $BD = q = n - x$; quindi $dz = - dy$, e $dq = - dx$, imperocchè tali valori ſurrogando nelle ſopra eſpoſte equazioni, rieſce che $-dy = dz = -dx \times \overline{\frac{n-x}{b-y}}$, cioè $-dy = \frac{xdx - ndx}{z}$, come pure $-ddy = \frac{dx^2 - dy^2}{z}$; e perchè $dy^2 = \frac{x^2dx^2 - 2nxdx^2 + n^2dx^2}{z^2}$, ſiccome anche $q^2 = n^2 - 2nx + xx = zz - aa$, o ſia $zz = a^2 + n^2 - 2nx + xx$, introducendo tal valore di dy^2, ed il preſente di z^2, riſulterà $-ddy = \frac{a^2dx^2}{z^3}$, di più ancora $dddy = \frac{3dyddy}{z}$. In oltre abbiam pure che $ds = \sqrt{dq^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; dove mettendovi i neceſſari valori dall' equazion della Curva ricavati, ſi ridurrà egli in $ds = \frac{dx}{z}\sqrt{2n^2 - 4nx + 2x^2 + a^2}$, ed avrem così le quantità da introdurſi nell' aſſegnate formule.

649. Per la ſalita dunque, di cui ſi ha $R = -\frac{fd^3yds}{2ddy^2}$ ponendovi i reſpettivi valori, rieſce $R = \frac{-3fdyddy}{2zddy^2} \times ds = \frac{3f}{2a^2} \times \overline{n-x}\sqrt{2n^2 - 4ax + 2x^2 + a^2}$ per l' eſpreſſion della reſiſtenza.

650. La Densità ancora $D = \frac{dddy}{2dsddy}$, verrà

$$D = \frac{3dy}{2zds} = \frac{3 \times \overline{n-x}}{2\sqrt{aa+\overline{n-x}^2} \cdot \sqrt{2n^2-4nx+2x^2+aa}}.$$

651. Dall'esser sempre $u^2 = -\frac{fds^2}{ddy}$, col sostituire i già notati valori ddy, e ds^2, ricavasi per la velocità $u^2 = \frac{f}{a^2} \times \overline{2n^2-4nx+2x^2+a^2}\sqrt{\overline{n-x}^2+a^2}$.

Il tempo pure verrà, sostituendovi le celerità precedenti, $dt = \frac{ads}{\sqrt{f}\sqrt{2n^2-4nx+aa \times \sqrt{aa+\overline{n-x}^2}}}$.

COROLLARIO I.

652. Se conducasi $BM = BD$, e $DO = HC\sqrt{2}$, e di poi tirata la retta MO, avremo per l'angolo retto in D, $\overline{MO}^2 = 4\overline{BD}^2 + 2\overline{HC}^2$; ovvero $\frac{MO}{\sqrt{2}} = \sqrt{2.\overline{BD}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{2.n^2 - 2nx + xx + a^2}$, imperocchè sostituendo nella resistenza al num. 649. ne verrà $R = \frac{3f \times BD \times MO}{2\overline{HC}^2\sqrt{2}}$.

COROLLARIO II.

653. Facciasi anche, che $DS = HC = a$, e perciò $BS = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{n^2 - 2nx + xx + aa}$,

quin-

quindi nella densità sopraccennata ponendo tali equivalenti valori, riescirà $D = \frac{3 \cdot BD}{\frac{2 . BS \times MO}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{BD}{BS \times MO}$.

C O R O L L A R I O III.

654. Posciachè supponesi che $u^2 = \frac{R}{D}$, introducendovi per la Resistenza, e Densità gli accennati valori de' Coroll. precedenti, riesce che $u = \frac{\sqrt{f} \times MO \times BS}{HC\sqrt{2}}$.

C O R O L L A R I O IV.

655. Il tempo che è $dt = \frac{ds}{u}$, risulterà pur anche $dt = \frac{HC \times ds\sqrt{2}}{\sqrt{f} \times MO \times BS}$; ma $ds = \frac{dx}{z}\sqrt{2 \times n^2 - 2nx + xx + aa}$ num. 648. ed $\frac{1}{\sqrt{2}} \times MO = \sqrt{2 \times n^2 - 2nx + xx + aa}$ num. 652. sicchè $dt = \frac{HC}{\sqrt{f} \times BS} \times \frac{dx}{z}$; di più abbiamo $zz = n^2 - 2nx + xx + aa = BS$ num. 653. onde ne verrà finalmente $dt = \frac{HC}{\sqrt{f} \times \overline{BS}} \times dx$.

S C O L I O I.

656. Si può notare nel prefato esempio, che trattan-

tandosi della salita son venute ambedue, cioè la resistenza, e la densità positive; e se maneggiar volessimo la scesa, di segno contrario risulterebbero, vale a dir negative. Laonde nell' Iperbola la sola salita sarà possibile, ed impossibile per conseguenza la scesa; il che in ogni altro caso avvenir dee, cioè che se possibile ella è un' Ipotesi, impossibile poi l' altra succede.

SCOLIO II.

657. Le considerazioni sopra quì fatte de' movimenti in ipotesi delle resistenze uniformi, dovendosi ridurre al fatto per potersi praticare ne' casi degli usuali moti da noi fatti, il Newton pensò ch' altra Curva sodisfar non potesse, che una specie d' Iperbola. E giacchè il mezzo dove sono i predetti moti eseguiti non è realmente in se stesso uniforme, e perciò credeva, che senza errore sensibile, potesse prendersi un' Iperbola tale ch' avesse un assintoto verticalmente situato.

Le ragioni di tal credenza allo Scolio della Prop. 10. Sezione 2. del Lib. 1. de' suoi Principj veder si possono, ed alla nota *b* susseguente de' Commenti più chiaramente ancora spiegate.

L' Eulero però trattando la teorica di tale Iperbola, nel tomo 2. della Meccanica al num. 951. asserisce che non può realmente provarsi la prefata posizione del Newton, d'assumersi tali Curve per quelle vere dal projetto descritte, nel mezzo uniforme mosso. Comunque egli sia, giacchè l' ordine lo richiede, nel Problema seguente sarà da me pure cotal moto esaminato, cioè ponendo che l' Iperbola così descritta sia la Curva, che dal projetto si scorre.

PRO-

PROBLEMA IV.

Descrivendosi dal projetto una data Iperbola, ch' abbia un assintoto verticalmente posto, determinare la resistenza, densità, e velocità in ogni punto di essa.

658. Il Centro della data Iperbola IDF sia C, Tav.14. ed un assintoto d' essa non verticale facciasi $CA = c$, Fig. 1. e l' altro verticale $CB = a$. Avvegnachè data pur sia la retta AB, pongasi egli essere $= e$, siccome parimente $IB = k$; supponendo scorso fino in D il projetto, si conduca DO paralella ad IB, e DN egualmente all' altro non verticale assintoto AC paralella. Il restante poi stia al solito, cioè $IP = x$, e $PD = y = BO$; si denomini $DO = z$. Essendo simili i triangoli CBA, ed NOD, verrà $CB : BA :: NO : OD$, onde $a : e :: NO : z$, e però $\frac{az}{e} = NO$, e quindi DN, $\sqrt{\frac{a^2 z^2 + z^2}{e^2}}$, e per espediente, facendo $\sqrt{a^2 + e^2} = m$, diverrà $DN = \frac{mz}{e}$. Sarà ancora $BN = BO + ON = y + \frac{az}{e} = \frac{ey + az}{e}$; sicchè anche $CN = a - \frac{ey - az}{e} = \frac{ae - ey - az}{e}$. Per proprietà dell' Iperbola fra gli assintoti, viene il rettangolo di CN in ND eguale a quantità costante, e però $\frac{mz}{e} \times \frac{ae - ey - az}{e} = bb$, cioè $\frac{maez - meyz - mazz}{ee} = bb$, ovvero $\frac{meaz - mazz - b^2 e^2}{mez} = y$. Differenziando adesso, a-

 vre-

vremo $dy = \frac{e^2b^2dz - maz^2dz}{mez^2} = \frac{eb^2dz}{mz^2} - \frac{adz}{e}$; ritenendo dz costante, e nuovamente differenziando, riesce $ddy = \frac{-2eb^2dz^2}{mz^3}$, e passando alle terze differenze, $dddy = \frac{6eb^2dz^3}{mz^4}$; ritrovasi ancora secondo il metodo solito, $ds = \frac{dz}{mez^2}\sqrt{m^2e^2z^4 + \overline{e^2b^2 - maz^2}^2}$, e però avrem fissate le quantità necessarie da sostituirsi. Ma perchè $k - x = z$, e perciò $-dx = dz$, intromettendo nelle sopraccitate equazioni, riducesi che $ddy = \frac{-2eb^2dx^2}{mz^3}$, $dddy = \frac{-6eb^2dx^3}{mz^4}$, siccome ancora $ds = \frac{-dx}{mez^2}\sqrt{m^2e^2z^4 + \overline{e^2b^2 - maz^2}^2}$. Sicchè valendosi della formula della scesa $R = \frac{fdsdddy}{2ddy^2}$, diverrà sostituendo, $R = \frac{3f}{4e^2b^2}\sqrt{m^2e^2 \times \overline{k-x}^4 + \overline{e^2b^2 - ma \times \overline{k-x}^2}^2}$.

659. La densità parimente $D = \frac{-dddy}{2dsddy}$ risulterà $D =$

$$\frac{3me \times \overline{k-x}}{2\sqrt{m^2e^2 \times \overline{k-x}^4 + \overline{e^2b^2 - ma \times \overline{k-x}^2}^2}}.$$

660. L' espressione $u^2 = \frac{-fds^2}{ddy}$, viene facendo $f = 1$, $u^2 = \frac{m^2e^2 \times \overline{k-x}^4 + \overline{e^2b^2 - ma.\overline{k-x}^2}^2}{2me^3b^2 \times \overline{k-x}}$.

CO-

COROLLARIO I.

661. Conducasi la tangente DT, ed in oltre l'infinitamente vicina ib, come pure la cb ad IF paralella, per aversi simili i triangoli DOT, e bcD, avremo $z : OT :: -dz : -dy$, e siccome $-dz = dx$, e però riescirà $OT = \frac{-z\,dy}{dx}$, e $dy^2 = \frac{\overline{OT}^2 \times dx^2}{z^2}$; quindi, perchè $dz^2 = dx^2$, ne verrà $ds^2 = \frac{z^2 dx^2 + \overline{OT}^2 \times dx^2}{z^2}$, cioè $ds^2 = \frac{dx^2}{z^2} \times \overline{z^2 + \overline{OT}^2}$; ovvero perchè la radice di dx^2 è negativa, $ds = \frac{-dx}{z}\sqrt{z^2 + \overline{OT}^2}$; ma perchè $z = k - x = PB$, e $DT = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{OT}^2}$, risulta perciò $ds = \frac{-dx \times DT}{PB}$. Laonde, come poco anzi si fece sostituendo, avremo per la resistenza $R = \frac{3mf \times PB \times DT}{4cb^2}$

COROLLARIO II.

662. Parimente per la densità $D = \frac{-dddy}{2dsddy}$; questi respettivi valori ponendovi, hassi $D = \frac{3}{2} \times \frac{1}{DT}$, cioè la densità in ragion reciproca della tangente DT, conforme dal Newton alla citata Proposizione fu ritrovato.

COROLLARIO III.

663. Nella velocità $u^2 \frac{-f ds^2}{ddy}$ parimente surrogando, viene $u^2 = \frac{mf\times\overline{DT}^2\times PB}{2eb^2}$; o pure perchè nell' ipotesi di cui ci prevalghiamo hassi $D = \frac{R}{u^2}$, mettendovi le resistenze, e le densità sopraccennate, risulterà la stessa $u = \frac{DT\sqrt{mf\times PB}}{b\sqrt{2e}}$.

COROLLARIO IV.

664. Stando sempre $dt = \frac{ds}{u}$, surrogando come sopra, viene il tempo $dt = \frac{-bdx\sqrt{2e}}{\overline{PB}^{\frac{1}{2}}\sqrt{mf}}$, ponendovi in vece dell' archetto di Curva pure.

SCOLIO.

665. Dalla data Curva ritrovato avendosi le consuete, e soprallegate passioni, proseguiremo adesso a sciogliere le questioni con altri dati, e nel seguente Problema restando per data la Curva descritta, si prenderà per nota ancora la resistenza, da che poi ne inferiremo e la potenza del corpo, e le altre solite affezioni, stando sempre come sopra le forze fra loro parallele.

PRO-

PROBLEMA GENERALE.

Data la Curva, e la resistenza del mezzo in qualunque modo, ritrovar ogni affezione del movimento. Tav. 14. Fig. 2.

666. Prendasi la Curva AN per una data qualsisia, e denominando sempre $AP = x$, e $PB = y$, e l'elemento curvilineo ds, e $PQ = dx$, e del projetto in B salito, al solito la velocità $= u$, e la Resistenza $= R$, la quale data egli si vuole per le quantità alla Curva attinenti, f poi sia la potenza, che ci determiniamo di ritrovare. Essendo pertanto sempre vero che $f = \frac{-u^2 ddy}{ds^2}$, canone già più volte praticato, se quì avessimo date le velocità, dalla differenza dell' arco della Curva, e dall' altra seconda della variabile y, nota pure avrebbesi essa forza. Imperciocchè prendasi la general formula della salita $-fdy - Rds = udu$, integrata, e sostituendo per la velocità predetta, hassi $f = \frac{2ddy \times \int Rds}{ds^2 - 2yddy}$, che sarà la potenza cercata.

667. La velocità si ha parimente dalla precitata espressione $u^2 = \frac{-fds^2}{ddy}$, posciachè la forza precedente surrogandovi in vece di f, si riduce $u^2 = \frac{-2ds^2 \times \int Rds}{ds^2 - 2yddy}$

668. Il tempo altronde $dt = \frac{ds}{u}$, verrà dato col porvi la velocità precedente, cioè $dt = \frac{\sqrt{2yddy - ds^2}}{\sqrt{2\int Rds}}$.

669. Supponendo il mezzo in qualsisia forma, e dato

dato per qualunque variabile, relativa all'equazion della Curva, ma però facciasi, che resista come i quadrati delle velocità, talchè $D = \frac{R}{u^2}$, sostituendovi la velocità sopra trovata, viene la densità $D = \frac{R \times \overline{ds^2 - 2y\,ddy}}{-2\,ds^2 \times \int R\,ds}$.

SCOLIO.

670. Le resistenze nel precedente Problema l'abbiam prese per cognite generalmente per una qualunque quantità; ma poichè elle sempre han proporzione con le velocità, onde è ch'a parte verrà trattato il Problema di ritrovar le consuete affezioni, con la posizione di qualche loro ragione con le velocità predette.

PROBLEMA VI.

Data la Curva, e le resistenze uniformi, ch'al quadrato delle velocità sieno proporzionali, ritrovare le proprietà tutte del movimento.

671. Stia la Curva medesima, siccome la costruzione antecedente, e giacchè vuole la condizione, che $R = u^2$, perchè $D = 1$, la formula del num. 610. per la salita è $-\frac{u^2\,dp}{p} - u^2\,ds = u\,du$, che integrata come fu num. citato, viene $u = \frac{UP}{pq^s}$; o pure ridotta così num. 612. $u = \frac{UPq^{-s}ds}{b\,dx}$, ed avrassi la velocità.

672. Adoprando il solito canone $f = \frac{-u^2\,ddy}{ds^2}$, e sosti-

fostituita la precedente velocità, hassi $f = \frac{-U^2 P^2 q^{-2'} ddy}{b^2 dx^2}$, che sarà la forza ricercata.

673. Parimente è il tempo $dt = \frac{ds}{u} = \frac{b\,ds\,dx}{UPq^{-'}ds} = \frac{b\,dx\,q'}{UP}$, ove in tutte le espresse equazioni, vedesi che date sono le passioni proposte, da ritrovarsi per le assunte dell' equazione x, y, ed s.

COROLLARIO I.

674. Quando che fosse $s = o$, la velocità $u = \frac{PU}{pq'}$, risulterebbe $u = \frac{PU}{p}$, vale a dire la stessa del num. 461. dove si pose ch'il moto eseguito fosse nel vacuo. E di fatto nel senso stesso ritorna, valendosi della citata formula $-\frac{u^2 dp}{p} - u^2 ds = u\,du$, poichè con tal supposto riducesi in $-\frac{dp}{p} = \frac{du}{u}$, equazione medesima del num. citato. Proseguiremo adesso con varj esempj, prendendo per date in ispecie diverse Curve, a norma del metodo fin quì ritenuto.

ESEMPIO I.

675. Fatto che sia il Cerchio la Curva AB, del raggio $= a$, onde venga per la di lui equazione $2ax - xx = yy$, atteso che l' ascissa dal vertice prendesi

desi, avremo $adx - xdx = ydy$, e però $dx = \frac{ydy}{a-x}$; sicome pure dall' aversi $ds^2 = dx^2 + dy^2$, riesce $dx = \frac{ds}{a}\sqrt{2ax-xx}$, e $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$; laonde nella formula già fissata sopra num. 671. surrogando, verrà $u = \frac{aPUq^{-t}}{b\sqrt{2ax-xx}}$.

676. Parimente la forza dalla nota legge indicata $f = \frac{-u^2ddy}{ds^2}$, col surrogarvi il prefato valore dell' u^2, riesce $f = \frac{a^2PU^2q^{-2t}}{b^2 \times 2ax-xx} \times \frac{-ddy}{ds^2}$, dove ancora l' altro valore sopra espresso di ds^2, e l' altro di $ddy = \frac{-a^2dx^2}{\overline{2ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$ dall' equazione inferito, ritenendo dx costante, includendovi, hassi in fine $f = \frac{a^2P^2U^2q^{-2t}}{b^2 \times \overline{2ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$.

Il tempo altresì risultà $dt = \frac{bq^t ds\sqrt{2ax-xx}}{aPU}$.

COROLLARIO I.

677. Ponendosi $s = o$, l' espressa velocità riesce $u = \frac{aPU}{b\sqrt{2ax-xx}}$; e la forza altronde $f = \frac{a^2P^2U^2}{b^2 \times \overline{2ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$, vale a dire, che la prima risulta la stessa del num. 472. e la seconda pure come al num. 470. così realmente doven-

vendo succedere, perchè la posizione include ch'il moto fatto venga nel vacuo.

ESEMPIO II.

678. Ponendo che la Curva AB sia la Parabola semplice, e di cui si riportò la costruzione al num. 628. dove ricavato venne num. 629. che $ddy = \frac{-2dx^2}{k}$, come pure $ds = \frac{dx}{k}\sqrt{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx}$; e perciò avremo $u^2 = \frac{P^2U^2q^{-2s}}{b^2dx^2} \times \frac{dx^2}{k^2} \times \overline{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx} = \frac{P^2U^2q^{-2s}}{b^2k^2} \times \overline{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx}$.

679. Come nell'anzidetto Esempio operando, diverrà la forza, che cercasi $f = \frac{-P^2U^2q^{-2s}}{b^2k^2} \times \frac{-2k^2dx^2}{k} \times \frac{\overline{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx}}{dx^2 \times \overline{k^2 + 4aa - 8ax + 4xx}} = \frac{2P^2U^2q^{-2s}}{b^2k}$.

COROLLARIO I.

680. Quando che pongasi $s = o$, la poco fa espressa velocità viene $u = \frac{PU}{bk} \times \sqrt{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx}$; vale a dire simile a quella del num. 466. d'allorchè nel vacuo si considerò farsi il moto, come in fatti il supposto presente un cotal moto comprende.

COROLLARIO II.

681. E' la forza parimente, $f = \frac{2P^2U^2}{b^2k}$, cioè la medesima eguale a costante, la quale per appunto ella è tale, siccome più volte hassi notato nella descrizion di questa Curva.

ESEMPIO III.

682. In vece della Parabola semplice pongasi esser ella d'ordine superiore, e quella in punto del num. 630. siccome ivi si ritrovò $ds = \frac{dx}{k^2} \times \sqrt{k^4 + 9 \times \overline{a-x}^4}$, e $-ddy = \frac{6dx^2}{k^2} \times \overline{a-x}$, onde nella citata formula della velocità sostituendo, verrà per essa $u = \frac{UP}{bq^t dx} \times \frac{dx}{k^2}\sqrt{k^4 + 9 \times \overline{a-x}^4} = \frac{UP\sqrt{k^4 + 9 \times \overline{a-x}^4}}{bk^2q^t}$.

683. E così egualmente per la potenza, avremo $f = \frac{6U^2P^2 \times \overline{a-x}}{k^2b^2q^{2t}}$.

684. E sarà il tempo parimente, col sostituire, $dt = \frac{k^2bq^t\,ds}{UP\sqrt{k^4 + 9.\overline{a-z}^4}} = \frac{bq^t dx}{UP}$, sostituendovi anche in luogo di ds, già sopra espresso.

ESEM-

ESEMPIO IV.

685. L' Iperbola equilatera sia la Curva AB, la di cui equazione l' abbiamo al num. 648. come anco le quantità da introdursi, cioè $-ddy = \frac{aadx^2}{z^3}$, e $ds = \frac{dx}{z}\sqrt{2n^2 - 4nx + 2x^2 + a^2}$, num. citato; verà perciò la velocità stabilita num. 671. $u^2 = \frac{U^2P^2q^{-2s}ds^2}{b^2dx^2}$ $= \frac{U^2P^2q^{-2s}}{b^2z^2} \times \overline{2n^2 - 4nx + 2x^2 + a^2}$.

686. Così parimente la forza cercata ei diviene $f = \frac{a^2U^2P^2q^{-2s}}{b^2 \times \overline{\overline{n-x}^2 + aa}^{\frac{3}{2}}}$, mettendovi il valore di z al precitato numero fissato.

Si ha il tempo cercato parimente così, $dt = \frac{ds}{u} = \frac{bdx}{UPq^{-s}}$.

SCOLIO.

687. Ci dispenseremo d' esemplificare in altre Curve, come anche con altre ipotesi delle resistenze in altra ragione con le velocità, che la presente, d' esser elle proporzionali, con la seconda dignità, alla resistenza predetta, mentre è cosa agevole per se stessa ad eseguirsi, e massimamente poi si tralascia, perchè, come altrove venne notato, in natura forse altra ragione, che l' e-

ſposta, con eſſa quelle non hanno; onde alla ſoluzione degli altri Problemi paſſeremo, aſſumendo con la Curva data, qualche altra affezione, e ſia adeſſo la celerità medeſima.

PROBLEMA VII.

Data la Curva come ſopra, e la velocità in un punto arbitrario di eſſa, ritrovar le forze, reſiſtenza, e denſità.

Tav.14. Fig. 2. 688. Si denominino ſempre come ſopra le quantità, ch' hanno luogo nella coſtruzione; ſiccome ſta fermo che $f = \frac{-u^2 ddy}{ds^2}$, ricavaſi primieramente qual ſia la potenza, giacchè data abbiamo in qualche forma la velocità, ed aſſegnata la Curva dal projetto deſcritta.

689. Si prenda il canone per la ſalita $-fdy - Rds = udu$, e poichè num. precedente ritrovata ſi pone al forza f, ſoſtituendovi in cambio d'eſſa, produceſi $\frac{u^2 dyddy}{ds^2} - Rds = udu$, cioè $Rds = -udu + \frac{u^2 dyddy}{ds^2}$; e ſiccome dx coſtante, ricavaſi $dyddy = dsdds$, e perciò $R = \frac{-ududs + u^2 dds}{ds^2}$, cioè eſpreſſa per quantità note la Reſiſtenza.

690. Per la regola coſtante, e fiſſa che $R = u^n D$, ponendovi il citato valore della R, ſi è $u^n D = \frac{-ududs + u^2 dds}{ds^2}$, ovvero $D = \frac{-u^{1-n} duds + u^{2-n} dds}{ds^2}$, la quale c' indicherà la denſità, e ſecondo i valori aſſegnati all' eſponente n delle velocità.

Il

Il tempo è ſuperfluo cercarlo, perchè dalla data celerità, ed il conſueto canone $dt = \frac{ds}{u}$ ei ci viene eſpreſſo.

COROLLARIO I.

691. Continuandoſi la poſizione della $n = 2$, rieſce la Denſità $D = \frac{-dds - u^{-1}duds}{ds^2}$, ovvero ſoſtituendo in luogo di dds, ſarà così $D = \frac{-du}{uds} + \frac{dyddy}{ds^3}$, e di queſta legge in ſeguito faremo uſo.

COROLLARIO II.

692. Col metodo ſteſſo potremo maneggiare l'ipoteſi della ſceſa aſſumendo l'altra formula, la quale in null'altro varierà, che ne' ſegni, ſiccome dalle nozioni premeſſe manifeſtamente appariſce.

COROLLARIO III.

693. Si ha num. 641. $r = \frac{bdy}{dp}$, ſiccome anche num. citato, $dp = \frac{-bdxdds}{ds^2}$, e perciò $r = \frac{-dyds^2}{dxdds}$. Inoltre nel ſu allegato canone $f = \frac{-uuddy}{ds^2}$, per eſſer $ddy = \frac{dsdds}{dy}$, ſoſtituendovi, ſe ne ricava $f = \frac{-uudds}{dyds}$, e ponendovi in cambio di dds il quì ſopra

pra notato valore, vien finalmente $f = \frac{u^2 ds}{r dx}$, donde pari mente avrem data la forza.

COROLLARIO IV.

694. Per la resistenza, che già hassi con la formula $-f dy - R ds = u du$, surrogandovi in luogo della forza f precedente, avremo $R = \frac{-u du}{ds} - \frac{uu dy}{r dx}$.

COROLLLARIO V.

695. E per la densità num. 691. mettendovi di nuovo il valore di $dy ddy$, e poi di dds dal num. 693. riesce $D = \frac{-du}{u ds} - \frac{dy}{r dx}$.

COROLLLARIO VI.

696. Siccome salendo dal punto A, non può darsi principio al moto senza avervi una data velocità; se supporremo esser questa costante, cioè sempre la stessa per ogni punto di Curva, la qual proprietà è propriamente del Circolo, chiamatasi perciò $= U$, sostituendo al numero 693, hassi $f = \frac{U^2 ds}{r dx}$.

COROLLARIO VII.

697. La Resistenza dall' altro canto, avvegnachè la velocità costante non abbia differenza, cioè $du = o$, col sostituire, ed ammetter tal posizione, al nume-

numero 694., egli viene $R = \frac{-U^2 dy}{r dx}$.

COROLLARIO VIII.

698. Così dicasi della Densità, num. 695. e vien ella $D = \frac{-dy}{r dx}$.

COROLLARIO IX.

699. Fino alla sommità della Periferia promosso il grave, stando il supposto presente, sappiamo, secondo la costruzione fatta, che il differenziale dy diviene $= o$, mentre dall' altra parte principiando a scendere dipoi il corpo accennato, convertesi da positivo in negativo; e però la resistenza $R = \frac{-U^2 dy}{r dx}$ poco fa ritrovata, siccome anche la Densità $D = \frac{-dy}{r dx}$, vengon tutte due $= o$.

COROLLARIO X.

700. Sicchè stando ivi $dy = o$, la più volte ricordata legge $ds^2 = dy^2 + dx^2$, riducesi in $ds = dx$; talchè riassumendo la ritrovata equazione di questa ipotesi, quale ella è $f = \frac{U^2 ds}{r dx}$, riesce $f = \frac{U^2}{r}$, vale a dire che la forza la medesima è della Centrifuga, più volte ricordata; la quale così in effetto risultar dee, perchè nel Circolo, e nel presente supposto punto, sono

no le forze al Centro d' esso dirette, il che in punto accade nel caso della Centrifuga suddetta, siccome pure della resistenza $= o$.

Si esemplificherà adesso con alcuni esempj, supponendo date le velocità, o espresse per qualche particolare equazione, come altresì data ponendo la Curva in ispecie.

ESEMPIO I.

701. La Curva AB sia la Parabola semplice, le di cui quantità differenziali, e delle quali abbiamo bisogno, stabilite hannosi num. 678. cioè $ddy = \frac{-2dx^2}{k}$, $ds^2 = \frac{dx^2}{k^2} \times \overline{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx}$. Perchè primieramente debbonsi ritrovare le forze, e le celerità già l'abbiam supposte date, sien queste esposte per quelle, ch' alla prefata Curva appartengo, e che ritrovate furono num. 629. cioè $u^2 = \frac{1}{2k} \times \overline{k^2 + 4a^2 - 8ax + 4xx}$: quindi riassunto l' allegato canone $f = \frac{-u^2 ddy}{ds^2}$, e ponendovi i citati valori, ritrovasi che $f = 1$: vale a dire, che risulta la potenza costante, siccome egli avvenir dee nella Parabola, per le nozioni più volte premesse, e per quello, che apparisce direttamente da tal supposto al citato numero.

702. Per la resistenza di già allegata al num. 689. cioè $R = \frac{-udu}{ds} + \frac{u^2 dy ddy}{ds^3}$, se vi porremo in essa il

sa il valore dell' u^2 del precedente numero, unitamente con il differenziale che ricavasi, vale a dire $- u du = \frac{2 a dx - 2 x dx}{k}$, come l'altro di $dy = \frac{2a dx - 2 x dx}{k}$ del num. 628. e gli altri precedenti fissati, ridurremo che $R = o$, siccome la densità num. 691. $D = o$, o sia tutte due nulla, come addivenir necessariamente dee, per le cose già dette.

E S E M P I O II.

703. Qualora la prefata Curva sia il Circolo dell' equazione determinata num. 635. $2ax - xx = yy$, dal citato numero hannosi le quantità necessarie già fissate, cioè $dy = \frac{a dx - x dx}{\sqrt{2ax - xx}}$, $ddy = \frac{- a a dx^2}{2ax - xx^{\frac{3}{2}}}$, e $ds^2 = \frac{a a dx^2}{2ax - xx}$. Ciò posto, date pure essendo le celerità, sieno elle perciò espresse in quelle medesime quantità del num. 639. fatta $f = 1$, cioè $u^2 = \sqrt{2ax - xx}$.

Dunque primieramente da $f = \frac{- u^2 ddy}{ds^2}$, avremo

$$f = \frac{a a dx^2}{2ax - xx^{\frac{3}{2}}} \times \frac{\sqrt{2ax - xx} \times 2ax - xx}{a a dx^2} = 1,$$

vale a dire, che la potenza è costante; il che giustamente richiede la supposizione delle velocità presenti, siccome direttamente concorda num. citato.

704. Colla necessaria sostituzione, si ritroverà la resistenza $R = \frac{u u dy ddy}{ds^3} - \frac{u du}{ds}$ al Problema gene-

 rale

rale determinata, ponendovi anche la velocità assunta, siccome la sua differenza $u\,d\,u = \frac{a\,d\,x - x\,d\,x}{2\sqrt{2\,a\,x - x\,x}}$; onde ne avremo $R = \frac{-a^2 d\,x^2 \times \overline{a\,d\,x - x\,d\,x}}{d\,s^3 \times \overline{2\,a\,x - x\,x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{a\,d\,x + x\,d\,x}{2\,d\,s\sqrt{2\,a\,x - x\,x}}$, e seguendo a sostituire i respettivi valori di $d\,s$, verrà $R =$ $\frac{a^2 d\,x^3}{-a^3 d\,x^3} \frac{\times \overline{a - x} \times \overline{2\,a\,x - x\,x}^{\frac{3}{2}}}{\times \overline{2\,a\,x - x\,x}^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\,x \times \overline{x - a}\sqrt{2\,a\,x - x\,x}}{2\,a\,d\,x\sqrt{2\,a\,x - x\,x}} =$ $\frac{1}{-a} \times \overline{a - x} - \frac{a + x}{2\,a}$, dove alla medesima denominazione riducendo, riesce finalmente $R = \frac{-3}{2\,a} \times \overline{a - x}$.

705. Rispetto alla densità pure farannosi le medesime sostituzioni, assumendo il canone generale fissato, col porre che $n = 2$, num. 691. cioè $D = \frac{-d\,u}{u\,d\,s} + \frac{d\,y\,d\,d\,y}{d\,s^3}$; ne avremo perciò $D = \frac{\overline{a\,d\,x - x\,d\,x}}{d\,s^3\sqrt{2\,a\,x - x\,x}} \times \frac{-a^2 d\,x^2}{\overline{2\,a\,x - x\,x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{a\,d\,x + x\,d\,x}{2\,d\,s \times \overline{2\,a\,x - x\,x}}$, e col porvi di più anche i valori del differenziale $d\,s$, sarà $D = \frac{-a + x}{a\sqrt{2\,a\,x - x\,x}}$ $\frac{-a + x}{2\,a\sqrt{2\,a\,x - x\,x}}$, ed in fine riducendo alla denominazione

zione medesima, risulterà $D = \frac{-3}{2a} \times \frac{a-x}{\sqrt{2ax-xx}}$; dove scorgesi, che tanto la resistenza antecedente, che la presente densità sono elle espresse nella medesima forma, che ritrovate furono al num. 636. e 637. in cui la Curva assunta fu la medesima, e direttamente trovate furono quelle velocità, che per date ora abbiam prese.

S C O L I O.

706. Si hanno fin quì trattati i Problemi con supposizione d'esser la potenza costante, e resistenza uniforme, da che le passioni de' movimenti sonosi dedotte, come è occorso vedere; ora ripiglieremo a trattar le mentovate quistioni nell' ipotesi di forza variabile, restando però sempre con direzione parallela, e le più volte allegate affezioni si ritroveran perimente.

P R O B L E M A VIII.

Stando le Resistenze uniformi al quadrato delle velocità proporzionali, e la forza sia variabile, trovar la Curva, velocità, e tempi. Tav. 14. Fig. 2.

707. Conforme al solito s' appelli $AP = x$, $PB = y$, ed $AB = s$, e le velocità del grave in $B = u$. La forza poi, ch' in qualunque legge variabile ella prendasi della PB, lontananza alla dignità n elevata, sarà $f = y^n$, sicchè nella più volte ricordata formola per la salita, in luogo di f surrogandovi la sua funzione, diverrà $-y^n dy - Rds = udu$; in oltre per la condizione della resistenza, perchè uniforme, ed al quadrato della velocità proporzionale,

nel canone $R = u^n D$, avremo $R = u^2$; di più $f = \frac{u^2 b}{p r}$ num. 459. ch'al caso presente viene $y^n = \frac{u^2 b}{p r}$, e perciò in luogo dell' y^n surrogando, e del raggio $r = \frac{b d y}{d p}$ num. 456. convertesi in $-\frac{u u d p}{p} - u u d s = u d u$, dove integrando, come abbiam fatto al num. 610. si ha $u = \frac{U P}{p q^s}$ per la velocità.

708. Per aversi un' equazione in cui la natura della Curva resti inclusa, s' assuma il poco fa allegato canone $y^n = \frac{u^2 b}{r p}$, cioè $\frac{p y^n d y}{d p} = u^2$ mettendovi il valore del raggio; e di poi in luogo dell' u^2 sostituendovi il valore, che ci dà la precedente espressione, ei si avrà $\frac{U^2 P^2}{p^2 q^{2s}} = \frac{y^n p d y}{d p}$, che è quanto cercasi.

709. Verrà egli poscia il tempo, $dt = \frac{p q^s d s}{P U}$. Altre posizioni far si potrebbero delle resistenze con qualche proporzione con le velocità, ma per difetto di non potersi integrar l' equazioni; e perciò privi d' inferir conseguenze di qualche rimarco, si tralasciano.

COROLLARIO I.

710. Quando che non direttamente, siccome abbiam fatto, ma bensì reciprocamente prender volessimo le forze in proporzione con le distanze, null' altro dal general canone $f = y^n$ far dovrebbesi, che suppor-re

re la dignità n negativa, e perciò $f = \frac{1}{y^n}$ diverrebbe, e si maneggierebbero altresì le quistioni col metodo medesimo, e forma; ond' è ch' ad altre suppofizioni pafferemo.

P R O B L E M A IX.

Data venga la Curva, e la potenza sia variabile, ritrovar le velocità, e tempo, Resistenza, e Densità.

711. Come nel Problema antecedente tutto restando, la forza $= f$ è al caso presente variabile, con tal variabilità da assegnarsi, siccome vedremo. Ciò posto, l'allegata regola di $u^2 = \frac{-f\,ds^2}{ddy}$, dalla quale possonsi avere le velocità con la ragione, che sarà assegnata nelle funzioni variabili della f, si differenzj, non ritenendo alcuna costante, perchè la potenza stessa quì varia, ne avremo $u\,du = \frac{-df\,ds^2}{2ddy} - \frac{2f\,ds\,dds}{2ddy} + \frac{f\,ds^2\,dddy}{2ddy^2}$: e siccome $ds\,dds = dy\,ddy$, e perciò verrà $u\,du = -f\,dy - \frac{df\,ds^2}{2ddy} + \frac{f\,ds^2\,d^3y}{2ddy^2}$, cioè sarà nota la velocità in quelle quantità pure x, e y, che per le forze saranno assegnate, e per conseguenza ancora il tempo. Tav. 14. Fig. 2.

712. Avendosi per la salita $-f\,dy - R\,ds = u\,du$, sostituendovi in luogo della velocità, viene $-f\,dy - R\,ds = -f\,dy - \frac{df\,ds^2}{2ddy} + \frac{f\,ds^2\,d^3y}{2ddy^2}$, ovvero $R =$

$df\,ds$

$\frac{dfds}{2ddy} - \frac{fdsd^3y}{2ddy^2}$, e sarà la resistenza.

Si può ancora esprimer così $\frac{R}{ds} = \frac{1}{2} d \left(\frac{f}{ddy}\right)$ mentre è lo stesso, come può vedersi prendendone effettivamente le flussioni.

713. Siccome hassi $R = u^n D$, facendosi come sempre $n = 2$, risulterà $D = \frac{-df}{2fds} + \frac{dddy}{2dsddy}$, col porvi anche il valore di u^2 già sopra espresso: ed avrem l' espressione per la densità.

O pure mettendovi la resistenza del secondo luogo, ed il restante come sopra, sarà $D = \frac{-ddy}{fds} \times \frac{1}{2} d \left(\frac{f}{ddy}\right)$.

SCOLIO GENERALE.

714. Giacchè dunque le forze mutano di valore, conforme abbiam supposto, e la mutazion loro dall' altra parte dovendo seguire a norma delle distanze dal centro di esse, cioè in qualche proporzione con l' y, o direttamente, o per converso ch' ei venga preso; onde è che generalmente supporremo tal variazione nella dignità n, a cui sarà l' y stessa innalzata; dunque $f = y^{\pm n}$ ne diverrà l' espressione, e differenziando, $df = \pm n y^{\pm n - 1} dy$; e perciò sì per un caso, che per l' altro, sostituendo dove fa d' uopo per la forza, e sua differenza l' equivalente valore, e in quell' ipotesi, che l' esponente n il richiede per lo supposto, verremo ad aver

aver espresse le quistioni, con quelle quantità, che dall' equazione date ci sono; di che con gli esempj in pratica meglio se ne comprenderà l'intelligenza.

ESEMPIO I.

715. Pongasi che la Curva, qual fu supposta data, sia la Parabola dell'equazione del num. 628. dove abbiam visto, che $dddy = o$; onde nella general formula $R = \frac{dfds}{2ddy} - \frac{fdddyds}{2ddy^2}$ tal valore sostituendo, si riduce $R = \frac{dfds}{2ddy}$. In oltre pongasi nel canone dello scolio precedente, che $n = o$, cioè che la potenza sia costante, e verrà pure $df = o$; sicchè finalmente $R = o$; vale a dire nulla la resistenza, cioè il moto nel vacuo.

716. La Densità egualmente $D = \frac{-df}{2fds} + \frac{d^3y}{2dsddy}$, ponendovi il supposto antecedente, viene ella pure $D = o$; come in realtà sì della medesima, che della resistenza seguir deve, subito che per data hassi la nominata Curva; conforme più volte abbiam notato.

717. La velocità dall' equazione $u^2 = \frac{-fds}{day}$ ricavasi la stessa del num. 629. ponendovi $f = 1$, e le solite differenze, come pure si dica del tempo.

ESEMPIO II.

718. Facciasi che sia la Curva data il circolo dell' equa-

equazione $2ax - xx = yy$ num. 635. dove ivi, ed al num. susseguente espresse hannosi le quantità differenziali, delle quali abbiamo al presente bisogno, cioè $dy = \frac{adx - xdx}{y}$, $ddy = \frac{-aadx^2}{y^3}$, $dddy = \frac{-3dyddy}{y}$, $ds = \frac{adx}{y}$; sicchè primieramente sostituendo in $u^2 = \frac{-fds^2}{ddy}$, avremo $u^2 = fy$, che sarà la velocità, ed in quella ragione che s' assegnerà di poi alla forza f, siccome più a basso vedremo.

719. Secondariamente la resistenza del num. 712. diviene, sostituendo tutti i necessarj valori, $R = \frac{-y^2 df}{2adx} - \frac{3f}{2a} \times \overline{a-x}$.

720. Siccome la densità num. 713. operando come sopra, riesce $D = \frac{-ydf}{2fadx} - \frac{3}{2a} \times \frac{\overline{a-x}}{y}$.

Il tempo si ha ancora $dt = \frac{ds}{u} = \frac{ds}{\sqrt{fy}} = \frac{adx}{\sqrt{fy^3}}$, ponendovi pure il valor di ds.

Restavi per veder varj casi, d'assegnare quel valore ad arbitrio alla forza, secondo l' accennato discorso dello Scolio generale num. 714. il che ora farem per fare ne' corollarj susseguenti, relativamente alla Curva, cioè al circolo, che per dato abbiam preso.

CO-

COROLLARIO I.

721. Facciasi nella formula dello scolio citato, ch' è $f = y^{\pm n}$, che sia $n = o$, il che include d'essere $f = 1$, cioè costante: nella velocità sopra, num. 718. ammettendo tal supposto, viene $u = \sqrt{2ax - xx}$; e siccome porta ancora che $df = o$, quindi nella resistenza num. 719. sostituendo, risulta $R = \frac{-3}{2a} \times \overline{a - x}$; e la densità num. 720. riesce $D = \frac{-3}{2a} \times \frac{a - x}{\sqrt{2ax - xx}}$; il tempo parimente viene $dt = \frac{adx}{PB^2}$; le quali equazioni son le medesime di quelle del num. 636. e seguenti, perchè le supposizioni sono le stesse, quantunque deducansi dalla formula generale con altre leggi fissata.

COROLLARIO II.

722. Pongasi che $n = 1$, vale a dire, che dal canone riesca $f = y$, e sono le forze, assumendo il segno più, direttamente come le semplici distanze; avremo primieramente $u = y$, ovvero la velocità come l'ordinata.

In secondo luogo la resistenza, per esser $df = dy$, riescirà $R = \frac{-y^2 dy}{2adx} - \frac{3y}{2a} \times \overline{a - x}$; e perchè la differenza dy l'abbiam già sopra espressa, quindi sostituendola, ne viene $R = \frac{-y}{2a} \times \overline{a - x} - \frac{3y}{2a} \cdot \times \overline{a - x} = \frac{-2y \times \overline{a - x}}{a} = \frac{-2PB \times CP}{AC}$, posto il raggio essere AC.

 Così

Così la densità si avrà $D = \frac{-y\,dy}{2ay\,dx} - \frac{3}{2ay}$

$\times\overline{a-x} = \frac{-1}{2ay}\times\overline{a-x} - \frac{3}{2ay}\times\overline{a-x} = \frac{-2\times\overline{a-x}}{ay} =$

$\frac{-2\times CP}{CA\times BP}$. Si è pure $dt = \frac{ds}{u} = \frac{ds}{y} = \frac{a\,dx}{2ax-xx}$.

COROLLARIO III.

723. Coll' aversi surrogate le quantità, le quali la specifica ipotesi ci somministra, nelle particolari espressioni ricavate nell' esempio precedente, hannosi dedotte tutte le affezioni solite; al medesimo intento sarebbemo pervenuti però, se anche nelle generali formule num. 712. e 713. avessimo i respettivi valori sostituiti.

COROLLARIO IV.

724. Suppongasi esser giunto in N sommità della periferia del Cerchio, posciachè $y = a = f$, diviene in tal caso num. 722. $u = a$, cioè costante.

COROLLARIO V.

725. La Resistenza poi, perchè $CP = o$, si convertirà ella in $R = o$, ed altrettanto dicasi della Densità, dovendo esser così, mentre la quantità che ambedue l'esprime, da positiva in negativa se ne trapassa.

COROLLARIO VI.

726. Diventando dunque eguali a nulla tutte due, ci si

ci si dimostra con ciò, che avrebbesi ne' predetti punti il caso del moto nel vacuo, conforme di fatto al num. 516. il medesimo trattandosi, ritrovasi la velocità, e forza costante con tal supposto.

COROLLARIO VII.

727. Ponendosi il caso ch' in A principio di projezione esista il grave, dove $y = o$, avrebbesi per le velocità $u = y = o$; e lo stesso della Resistenza dicasi, mentre $R = o$.

COROLLARIO VIII.

728. Il tempo $dt = \frac{ds}{o} = \infty$ diverrebbe; vale a dire, che mai da tal punto partirebbesi il mobile; il che ci viene insegnato pure dall' aversi dal supposto $f = y = o$, cioè che la potenza di niun valore essendo, non potrà mai spingere il grave lungi dal punto accennato. Così parimente $ds = udt = o$, che vuolsi intendere ancora, che lo spazio $= o$, siccome esser dee.

COROLLARIO IX.

729. Se $n = 2$, onde sia $f = y^2$, e $df = 2ydy$, assumendo sempre il Circolo per la Curva data, sostituendo perciò num. 718. verrà primieramente per la velocita, $u^2 = y^3$. In secondo luogo num. 719. $R = \frac{-y^3 dy}{adx} - \frac{3y^2}{2a} \times \overline{a-x}$; e sempre in vece di dy ponendovi il sopra allegato valore, riesce $R = \frac{-2y^2}{2a}$

 $\times a$

$\times\overline{a-x} - \frac{3y^2}{2a}\times\overline{a-x} = \frac{-5y^2}{2a}\times\overline{a-x}$. In terzo luogo la Denſità, viene $D = \frac{-2y^2dy}{2y^2dx} - \frac{3}{2ay}\times\overline{a-x}$, cioè $D = \frac{-5}{2ay}\times\overline{a-x}$. Il tempo ancora è $dt = \frac{ds}{u} = \frac{adx}{y^{\frac{3}{2}}}$.

COROLLARIO X.

730. Facendoſi $y = a$, ſi ha ſempre, che la reſiſtenza, e la denſità ſon nulla, per eſſer $dy = o$; onde conchiudeſi, che con qualunque ragione direttamente ponghiamo le forze, ſempre come ſe nel vacuo ſcorreſſe il mobile, nell' eſtremità del quadrante di cerchio egli accade.

COROLLARIO XI.

731. Suppoſta la dignità n negativa, che ciò vuol dire di prender le forze in reciproca ragione delle diſtanze, e di più che ſia $-n = 1$, e la Curva ſeguiti ad eſſer la ſin quì ſuppoſta; ſi avrà dunque $f = \frac{1}{y}$, e $df = \frac{-dy}{y^2}$; e perciò ſurrogando nella citata velocità, viene $u^2 = 1$, cioè invariabile ella rieſce. Per la reſiſtenza ſimilmente, prendendo il canone num. 719. ſi ha $R = \frac{dy}{2adx} - \frac{3\times\overline{a-x}}{2ay} = \frac{-1\times CP}{CA\times PB}$, col porvi la

la ſolita differenza dy. Siccome anche $D = \frac{dy}{2adu} - \frac{3 \times \overline{a - u}}{2ay} = \frac{-1 \times \overline{a - u}}{2ay} = \frac{-1 \times CP}{CA \times BP}$. O pure ſarà la prima, $R = -\frac{CP}{CA \times BP}$, e la ſeconda $D = \frac{-CP}{CA \times BP}$, cioè la CP diverrà negativa, o ſia dall' altra parte. Il tempo pure $dt = \frac{ds}{u}$ ſarà al fatto preſente, per eſſer la velocità coſtante, $dt = ds$, ed $s = t$, cioè come gli archi AB produrrannoſi i tempi ſcorſi.

COROLLARIO XII.

732. Volendoſi nel punto A, principio preſo della Curva, vederne le quantità che reſultano, ivi diviene $y = o$, e $CP = CA$; ſicchè ponendovi tali valori, ſi è $R = \frac{-CA}{CA \times o} = \infty$; ſimilmente ſi dirà della denſità. Ne ſegue ancora che $f = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{o} = \infty$, cioè la potenza infinita parimente.

COROLLARIO XIII.

733. Ponendolo ſalito nell' ultimo punto del Cerchio, cioè in N, dove $y = a$, e $CP = o$, ſi avrà $R = o$, e $D = o$, ſiccome ricavaſi dalle ſolite ſtabilite formule. Il tempo poi diverrà come al num. 731. atteſo che la velocità rieſce coſtante.

CO-

COROLLARIO XIV.

734. Procedendo con le Ipotesi, ponendo che $-n = 2$, onde sia $f = \frac{1}{y^2}$, e $df = \frac{-2ydy}{y^4}$, stando la Curva stessa, e perciò sostituendo come sopra, si ricava $u^2 = \frac{1}{y}$. Così pure $R = \frac{-y^2df}{2adx} - \frac{3f \times \overline{a-x}}{2a}$ num. 719. diverrà, mettendovi i respettivi valori delle forze, e delle differenze loro, siccome di dy, $R = \frac{x-a}{2ay^2}$. Similmente la densità $D = \frac{-ydf}{2fadx} - \frac{3 \times \overline{a-x}}{2ay}$ num. 720. viene $D = \frac{x-a}{2ay}$, le quali son parimente negative, indizio, ch' il moto convertesi in quello della discesa.

COROLLARIO XV.

735. Quì pure, posto che $y = o$, diviene tanto la resistenza, che la densità d' infinito valore, siccome eziandio $f = \infty$, e la velocità pure infinita, poichè $u = \frac{1}{o} = \infty$. Il tempo poi $dt = \frac{ds}{u} = o$. Tutte conseguenze alle quali ci guida il calcolo, quantunque però sian casi metafisici, ed al concepimento poco intelligibili.

COROLLARIO XVI.

736. Quando che $x = a$, e che è pure $y = a$, si ha

ha che $u=\frac{1}{\sqrt{a}}$, ed $R=o$, e $D=o$, cioè e l' una e l' altra è nulla, conforme in tutti i ſimili caſi abbiamo oſſervato.

COROLLARIO XVII.

737. Poſto che $f=\frac{1}{y^3}$, e però $df=\frac{-3dy}{y^4}$, rieſcono le generiche eſpreſſe formule, $u^2=\frac{1}{\sqrt{y^2}}$, cioè $u=\frac{1}{y}$. Siccome $R=\frac{3\times\overline{a-x}}{2ay^3}-\frac{3\times\overline{a-x}}{2ay^3}=o$; e $D=\frac{3\times\overline{a-x}}{2ay}-\frac{3\times\overline{a-x}}{2ay}=o$, vale a dire che ambedue ſon zero, ciò dimoſtrandoci, che come nel vacuo ſi fa il movimento, poſta la preſente poſizione di forze; e realmente al num. 470. preſa la Curva ſteſſa eſſere il circolo, dove la forza cercavaſi, ſi ritrovò ella eſſer tale quale l' abbiamo ſuppoſta al preſente; e dove ancora ſi ricavò la velocità ſimile alla preallegata num. 472. Dunque con modo inverſo vienſi egli a confermare le conſeguenze, che direttamente con altre poſizioni inferite ne furono. Così il tempo ſi è $dt=yds$, e collocandovi in cambio della differenza della Curva il preſcritto equivalente valore num. 718. ſarà $dt=\frac{aydx}{y}=adx$, e $t=ax$, cioè equivale al tempo medeſimo del num. 473. allorchè parlavaſi del moto nel vacuo, nella preſente Curva.

CO-

COROLLARIO XVIII.

738. Salito in N il grave, termine del quadrante del detto cerchio, posciachè $y = a$, si ha $u = \frac{1}{a}$, ovvero costante la velocità, e nell' inversa ragione del raggio. Dunque ancora $dt = a\,ds$, e perchè $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ci dà $ds = dx$, e però $dt = a\,dx$, ed $ax = t$, ovvero $t = aa$, mentre in tal punto diviene $x = a$.

COROLLARIO XIX.

739. Varranno gli esempj fin quì addotti per far con chiarezza concepire il metodo di trattar le quistioni di tal sorta; onde è ch' all' altro Capo trapasseremo.

CAPITOLO III.

Del moto Curvilineo nel mezzo resistente, dove le forze non paralelle fra loro, dirette sono ad un punto.

TRattate le teoriche del moto Curvilineo nel mezzo resistente, con tutti i suoi rapporti, con la supposizione delle potenze paralellamente dirette, sarà d'uopo trapassare alle altre trattazioni, in quest' ultimo Capo, delle potenze stesse, che riguardate vengono come dirette ad un punto, o sia Centro con direzione non paralella fra loro. E conforme nel precedente, così in questo Capitolo si maneggieranno tanto le dirette, che le inverse quistioni, dopo d' avere spianati alcuni necessarj principj, per chiarezza maggiore a tal materia attinenti. LEM-

L E M M A.

740. Propongasi ch' il projetto per la Curva AB cammini, con forza centrale $f=BK$, da cui al centro C attratto sia, giunto in B; si chiami $CB=y$, e si conduca l' infinitamente prossima CE, talmente che $BE=ds$. Fatto centro C, descritto l' archetto $BD=dx$, sarà $DE=dy$; in oltre si conduca la BU alla Curva perpendicolare, ed a questa il perpendicolo CU, avremo sempre $BU=p$ num. 493. e dipoi dal punto K tirata la perpendicolare KT, sappiamo per le cose dette num. 495. che BT si è la forza Centripeta, e KT la tangenziale. Ciò posto son simili i triangoli BDE, BTK, onde $ds : dy :: f : KT$, cioè $KT=\frac{f\,dy}{ds}$. Se il projetto s' accosti al centro C scendendo da A verso E, come ponesi nella fig. 4. per esser la differenza d'y negativa, si avrà $KT=\frac{-f\,dy}{ds}$, i quali saranno i canoni della forza tangenziale. Tav. 14. Fig. 3.

741. La medesima similitudine de' sopraccitati triangoli ci porge $f : BT :: ds : dx$, vale a dire che $BT=\frac{f\,dx}{ds}$, e sarà l' equivalente valore della forza centripeta. Onde scorgesi ch' anche supponendo esser dirette le potenze ad un punto, le formule delle forze necessarie da introdursi, sono elle le stesse, che dell' altro caso della direzion paralella fra loro, siccome num. 592., e seguenti può vedersi.

742. Sicchè la legge generale ammessa al num. 600. del moto per amendue gli archi $f\,dy \pm R\,ds = -u\,du$ varrà pure per quello, di cui ora parlasi, delle potenze dirette al Centro.

COROLLARIO I.

743. Pertanto prevalendosi della costruzion della Curva del num. 493. d' allorchè ragionasi del movimento nel vacuo, di quando la forza è diretta al Centro, avremo ch' il raggio dell' osculo sarà $r = \frac{y\,dy}{p}$, come pure num. 494. che $p = \frac{y\,dx}{ds}$.

SCOLIO.

744. Le trattazioni di questa Ipotesi si maneggieranno secondo il consueto; avendosi però quei riguardi degli specifici casi, ch' elle comprendono. La considerazione delle potenze assunte costanti, sarà però quì tralasciata, mentre non ponendosi i movimenti fatti sopra la superficie della Terra, ma bensì ad un tal qual punto, ch' egli è il centro, diretti, queste perciò saran prese variabili, a norma delle distanze fra il centro detto, ed il grave interposte. Non è però ch' anche assumendole costanti, non se ne potesser conchiudere le necessarie illazioni; ma si ometterà al presente, per esser cosa agevole in se ad eseguirsi, e per non estenderci maggiormente.

PROBLEMA I.

Data la forza tendente al Centro in qualunque ragione delle distanze, e le resistenze ritenute uniformi, ritrovar la Curva, e l' altre affezioni.

Tav.14. Fig. 3. 745. La costruzione della figura precedente restando,

do, pervenuto fino in B il projetto, salendo dal punto A, secondo lo stabilito al num. 600. avremo sempre $-fdy - Rds = udu$. In virtù della forza centripeta alla centrifuga eguale, pure anche in questo moto adattando il principio, si ebbe num. 597. $u^2 = \frac{fpdy}{dp}$, onde differenziando, e sostituendo, risulta $-fdy - Rds = \frac{1}{2} d\left(\frac{fpdy}{dp}\right)$, dove racchiudesi la specifica natura della cercata Curva.

746. Sono simili i triangoli BED, BCU, e per aversi $BU = p$, si avrà $ds : dy :: y : \sqrt{y^2 - p^2}$ cioè $ds = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - p^2}}$; onde nell' equazione surrogando, abbiamo $-fdy - \frac{Rydy}{\sqrt{y^2 - p^2}} = \frac{1}{2} d\left(\frac{fpdy}{dp}\right)$, e sarà altra equazione, in cui sta posta la natura della Curva.

747. Perciocchè si ha dall' espressione poco anzi ricordata $u^2 = \frac{fpdy}{dp}$, diviene $\frac{u^2 dp}{pdy} = f$, sicchè in luogo d' f nella precedente surrogando, ne viene $-\frac{u^2 dp}{p} - \frac{Rydy}{\sqrt{y^2 - p^2}} = \frac{1}{2} d\left(\frac{fpdy}{dp}\right)$.

748. Pertanto stando uniformi le resistenze, da che la densità vien costante, vi porremo perciò l' ipotesi più volte ricordata, quale ella è d' $R = u^2$; laonde la generica formula num. 745. risulta $-fdy - u^2 ds = udu$; e di più in vece della forza ponendoci il suo valore num. precedente riesce $-\frac{dp}{p} - ds = \frac{du}{u}$, donde inte-

 gran-

grando ſiccome abbiam fatto num. 610. ne rieſce per la velocità $u = \frac{PU}{pq^s}$.

749. Così il tempo è $dt = \frac{ds}{u} = \frac{pq^s ds}{PU}$.

COROLLARIO I.

750. Col valerſi del canone num. 743. $p = \frac{y\,dx}{ds}$, nella velocità allegata ſoſtituendo, ſarà $u = \frac{PUq^{-s}ds}{y\,dx}$. Deveſi perciò aver quì il riguardo riſpetto al differenziale dx, che ei non è fluſſione d'arco coſtante, e perciò per integrarſi ſurrogar deeſi, ſiccome fu avvertito num. 500. Il tempo ſimilmente verrà $dt = \frac{yq^s dx}{PU}$.

COROLLARIO II.

751. Poſte le reſiſtenze alle ſemplici velocità proporzionali, talchè ſia $R = u$, la regola fiſſata num. 748. è allora $-\frac{u\,dp}{p} - ds = du$, e poichè $u = \frac{\sqrt{fp\,dy}}{\sqrt{dp}}$, verrà poſcia $-\frac{\sqrt{f\,dy\,dp}}{\sqrt{p}} - ds = du$, eſpreſſione da cui aver ſi poſſono le velocità, e per conſeguenza il tempo pure.

COROLLARIO III.

752. Secondochè fu inteſo allo Scolio generale num.

num. 714. relativamente alla variazion delle forze, così dovrà quivi intendersi parimente; laonde $f = y^{\pm n}$ sarà la di loro espressione, ed a norma dell' assegnaro valore alla dignità n, dovrà nelle precedenti espressioni tutte sostituirsi. E però, pognam per esempio nella legge, ch' è $u^2 = \frac{fpdy}{dp}$, quale ella serve per la velocità, che debbasi sostituire la forza in quella ragione, ch' ad arbitrio prenderemo, diverrà generalmente $u^2 = \frac{py^{\pm n}dy}{dp}$. E così parimente, dovunque ha luogo sopra la potenza, sarà d' uopo eseguire.

S C O L I O.

753. Questo seguente problema si è lo stesso, che dal Newton ne' suoi principj, dal Bernoulli Giovanni, e dall' Eulero parimente è stato elegantemente trattato, ed il quale eziandio più considerazioni comprende dello sciolto precedentemente, mentre varie Curve in ispezie suppor si possono, siccome altresì le varie ragioni delle potenze colle distanze, materia danno d' estender le riflessioni, per doversi rinvenir dipoi le Resistenze, e densità. Si scioglierà da me parimente col principiato metodo, per non tralasciare quanto è necessario all' intelligenza delle presenti trattazioni.

P R O B L E M A II.

Date le forze con qualunque ragione delle distanze, e data sia egualmente la Curva, rinvenire ogni altra passione del movimento.

754. Stando fisse tutte le denominazioni delle Tav. 14.
quan- Fig. 3.

quantità del problema antecedente, si riassumerà di nuovo la spesse volte allegata legge $u^2 = \frac{fpdy}{dp}$, e perchè si ha data la curva dal supposto, come ancora la ragione della potenza, si verrà perciò ad avere per conseguenza la velocità in qualsisia punto della medesima.

755. Differenziandola pertanto, ritenuta la differenza dy costante, perchè ella è funzione di dx, da quanto apparisce per le nozioni precedenti, si avrà $udu = \frac{fdy}{2} + \frac{pdfdy}{2dp} - \frac{fpdyddp}{2dp^2}$; perciocchè assumendo la formula della salita num. 745. e surrogando l'equivalente della velocità, è allora $-fdy - Rds = \frac{fdy}{2} + \frac{pdfdy}{2dp} - \frac{fpdyddp}{2dp^2}$, o vogliam dire che $R = \frac{fpdyddp}{2dsdp^2} - \frac{pdfdy}{2dsdp} - \frac{3fdy}{2ds}$, la quale ci dà la cercata resistenza.

756. Per la densità poi, se ne avrà il valore dalla nota legge $R = u^n D$, ponendo sempre ch' $n = 2$. Onde il valore sopra num. 754. esposto ponendovi, con di più l'antecedente anco della R, avremo $D = \frac{ddp}{2dsdp} - \frac{df}{2fds} - \frac{3dp}{2pds}$.

757. E' anche il tempo $dt = \frac{ds}{u} = \frac{ds\sqrt{dp}}{\sqrt{fpdy}}$, operando al solito.

COROLLARIO I.

758. E' eziandio, in virtù della nota legge della forza centripeta alla centrifuga eguale, $\frac{fdx}{ds} = \frac{u^2}{r}$, da che

che per la data curva, aver dovrannosi le velocità, posciachè in qualche ragione pure saran date le potenze.

COROLLARIO II.

759. Si differenzj adesso tal precitata equazione, dx ritenuta costante, secondodochè sempre si è fatto, e sarà $udu = \frac{rdfdxds + fdrdxds - rfdxdds}{2ds^2}$, quindi sostituendo tal valore nella generica formula della salita, ei producesi $-fdy - Rds = \frac{rdfdxds + fdrdxds - rfdxdds}{2ds^2}$, cioè riducendola, $R = \frac{rfdxdds}{2ds^3} - \frac{rdfdx - fdxdr}{2ds^2} - \frac{fdy}{ds}$, che sara la cercata resistenza.

COROLLARIO III.

760. La densità similmente, coll'aversi $R = u^2 D$ col far le necessarie sostituzioni, risulta $D = \frac{dds}{2ds^2} - \frac{df}{2fds} - \frac{dr}{2rds} - \frac{dy}{rdx}$.

COROLLARIO IV.

761. Volendosi porre, che la potenza fosse sempre costante, e però che la di lei differenza debba nulla divenire, cancellandola dalle poco anzi stabilite equazioni, num. 755. e 756. diverrebbe primieramente $R = \frac{fpdyddp}{2dsdp^2} - \frac{3fdy}{2ds}$. In secondo luogo, $D = \frac{ddp}{2dsdp} - \frac{3dp}{2pds}$.

CO-

COROLLARIO V.

762. E su questo supposto le altre fissate espressioni del coroll. 2. e 3. prendendo, verrà la prima $R = \frac{rf\,dx\,dds - f\,dr\,dx\,ds}{2ds^3} - \frac{f\,dy}{ds}$, e la seconda $D = \frac{dds}{2ds^2} - \frac{dr}{2r\,ds} - \frac{dy}{r\,dx}$.

SCOLIO.

763. Generalmente si sono fissate le solite affezioni senza supporre spezialmente nè Curva, nè ragione di forze a qualche distanza; sicchè resterà adesso di assumerle particolarmente, e riguardo alle citate potenze, varrà quanto si espresse allo scolio generale num. 714. cioè che $f = y^{\pm n}$; ed alle Curve riguardando, prenderò quelle per date in ispezie, che dal Newton, e dal Bernoulli prese furono, e coll' una, e l'altra delle precedenti espressioni maneggerò le questioni, siccome vedremo.

ESEMPIO I.

Tav. 14. Fig. 5. 764. Sia la spirale logaritmica BDE la Curva data, supposto B il centro, dove tendon le forze, essere il polo d'essa Curva; stando in D il projetto, si nomini $BD = y$, e tirata l'infinitamente vicina BE, sia $DC = dx$, e però $DE = ds$. Inoltre condotta la perpendicolare DN alla Curva nel punto D, e la BN a questa stessa a perpendicolo, seguendo le costruzioni precedenti, sarà $DN = p$. Per esser l'angolo NDT, fatto

fatto dalla tangente in tal punto sempre costante, conforme è noto, ed altronde fu detto, e la perpendicolare BN formando l' angolo retto in N, avrem perciò dato l'angolo BDN, e l' altro NBD, e conseguentemente il triangolo BDN l' avrem dato in ispecie, perlochè la ragione di BD a DN data sarà ancora ella; la quale supposta quella di c ad a, si avrà $cp = ay$, e $dp = \frac{ady}{c}$. Differenziando nuovamente col fissare dy costante, si ridurrà in $ddp = o$, onde sostituendo ove è d' uopo tal valore, risulteranno le ricerche necessarie.

765. Fra tanto pongasi che $f = y^n$, e quindi $df = ny^{n-1}dy$, e prendendo la espressa resistenza nel primo caso num. 755. e surrogando, come abbiam sopra detto, perchè $ddp = o$, viene $R = \frac{-npy^{n-1}dy^2}{2dsdp} - \frac{3y^n dy}{2ds}$, e di più i respettivi valori di p, e della sua differenza dell' equazione citata ponendovi, avremo $R = \frac{-ny^n dy - 3y^n dy}{2ds}$; ma la ragione di ds a dy viene parimente data nel triangolo DEC, la quale ponghiamo, ch' ella sia quella di b al k, e però $ds : dy :: b : k$, cioè $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{b}$, quindi sostituendo pure anche, vien finalmente $R = \frac{\overline{-n-3} \times ky^n}{2b}$; vale a dire che trascurate le costanti, risultano le resistenze proporzionali alle distanze; il che giustamente concorda con la ragione dal Newton, e Bernoulli ritrovata.

766. Per le densità num. 756. adoprando la medesima sostituzione di forze come sopra, si ha $D = \frac{-ny^{n-1}dy}{2y^n ds} - \frac{3dp}{2pds}$, dove anco i respettivi sopraccitati valori pure mettendovi, e del raziocinio stesso valendosi, viene in fine $D = \frac{k}{2b} \times \overline{-n-3} \times \frac{1}{y}$, cioè nella reciproca delle ricordate distanze.

767. La velocità altronde è pure ella $u^2 = \frac{y^n p dy}{dp}$, cioè $u = \sqrt{y^{n+1}}$, facendo quanto deesi. E quindi il tempo $dt = \frac{ds}{\sqrt{y^{n+1}}}$.

COROLLARIO I.

768. Dunque riflettendo come il Newton, potrassi conchiudere, ch' ogni volta che si porranno le resistenze nella ragion composta delle semplici densità, e del quadrato delle velocità, quale è la posizione, da cui ne abbiamo dedotte le formule generali, e ch' in oltre la forza centrale sia $f = y^n$, e la densità medesima $D = \frac{1}{y}$, dovrà girare il projetto sempre, e poi sempre nella Spiral logaritmica, e di più sarà quella in ispecie, che stabilita verrà dalla ragione di k ad b.

COROLLAR O III.

769. Si noti che nell'equazione dedotta delle celerità, la ragion suddetta di k ad b non avvi luogo, perciocchè se ne potrà inferire, ch'in ogni Spirale la veloci-

locità farà sempre eguale, in distanze però dal Centro eguali, mentre con esse soltanto ha luogo la ragion loro. num. 767.

COROLLARIO III.

770. La formula della salita è stata solamente maneggiata, siccome abbiam visto, dal quale ordine però non differirebbe la trattazion della scesa. Di quest' ultima le quantità medesime risulterebbero, ma bensì diverse ne' segni, conforme è stato più volte detto; onde è, che essendo negative nella posizion del salire, positive a contrario nello scendere riesciranno, e perciò la scesa del grave soltanto avremo in tal movimento possibile.

COROLLARIO IV.

771. Se volessimo trattar l' altro caso, ch' egli è $f = y^{-n} = \frac{1}{y^n}$, cioè la forza in qualche reciproca ragione delle dette distanze, seguendo il metodo medesimo, si ricaverà primieramente, che $u^2 = y^{-n+1}$, e così da questa avrebbesi poi il tempo. Secondariamente $R = \frac{\overline{n-3}}{2b} \times \frac{k}{y^n}$. In terzo luogo, $D = \frac{k}{2b} \times \overline{n-3} \times \frac{1}{y}$, mentre nient' altro resta che fare, se non che variare il segno alla dignità n.

COROLLARIO V.

772. Or dunque diasi all' esponente n quel valo-

 re,

re, che piace, e per esempio sia $n=1$: la resistenza, num. precedente, riesce $R=\frac{\overline{1-3}}{2}\times\frac{k}{b}\times\frac{1}{y}=\frac{-k}{b}\times\frac{1}{y}$. La densità dall' altro canto è pure $D=\frac{-k}{b}\times\frac{1}{y}$, cioè come la resistenza stessa. La velocità, num. citato, sarà $u=\sqrt{y^{\overline{-1+1}}}=1$, vale a dire costante; il che di fatto ricavasi pure col supporre $R=u^2D$, col mettervi le resistenze, e densità quì sopra notate. Il tempo è $dt=\frac{ds}{u}=ds$, o sia come gli archi medesimi.

COROLLARIO VI.

773. Ponendosi $n=3$, divengono le sopraccennate resistenze, e densità ambidue $=o$, e la velocità altresì $u=\frac{1}{y}$; che è quest' ultima simile a quella del num. 526., dove fu posto, che nella curva stessa viaggiasse il mobile, ed il moto fatto nel vacuo, siccome il citato supposto richiede, giacchè nulla diviene la resistenza.

COR LLARIO VII.

774. Se la $n=4$, ovvero a qualunque altro numero maggiore del tre, viene la sopraddetta Resistenza $R=\frac{\overline{4-3}}{2}\times\frac{ky^{-4}}{b}=\frac{k}{2b}\times\frac{1}{y^4}$. E similmente $D=\frac{k}{2b}$

$\frac{k}{2b} \times \frac{1}{y}$; cioè tutte due di valore positivo; quindi convertesi allora nel fatto della discesa, quale sola è possibile. E perciò ne' soli casi della forza in ragione reciproca delle distanze, dove abbiasi la dignità loro maggiore del 3. ed in quello della discesa, avrassi possibile il moto nell' accennata Curva.

S C O L I O.

775. Essendo l' enunciato Problema sì famigerato, per essersi con tanta estenzione dal Newton trattato, e di poi dal Bernoulli eziandio, non reputo fuor di proposito se nella sua totale estensione da me pure anche sia maneggiato. Laonde per essersi sopra due generiche formule stabilite, per rinvenirsi le note passioni del supposto movimento, e con una delle quali avendone di già vista l' operazione, quindi proseguendo a ritenersi la Curva suddetta, cioè la spiral logaritmica, coll' altra formula le stesse affezioni ricercheremo.

A L T R I M E N T I.

776. Si prenda dunque gli altri sissati canoni, e primieramente della resistenza num. 759. ch' è $R = \frac{rfdx\,dds}{2ds^3} - \frac{rdfdx - fdxdr}{2ds^2} - \frac{fdy}{ds}$; dal triangolo DEC infinitamente piccolo, siccome è chiaro per l' Algebra, si ha l' equazione differenziale della spirale accennata, quale ella è $kdx = ady$; e perciò differenziando di nuovo, ritenendo costante dx, ricavasi $ddy = o$; di più è sempre vero, che da $ds^2 = dx^2 + dy^2$, con tal supposto,

poſto, viene $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, cioè al caſo preſente $dds = 0$ pure anche, per eſſer $ddy = 0$; onde ſurrogando, ne riſulta $R = \frac{-r\,df\,dx - f\,dx\,dr}{2ds^2} - \frac{f\,dy}{ds}$.

Ciò poſto pongaſi ſempre $f = y^n$, e così $df = ny^{n-1}dy$, ſicchè mettendovi ancora tali valori, viene $R = \frac{dx}{ds} \times \frac{\overline{-nry^{n-1}dy - y^n dr}}{2ds} - \frac{y^n dy}{ds}$. Si noti di più che lo ſteſſo triangolo DCE ci dà la ragione di dx a ds, e poniamo che egli ſia quella della a all' b, e però $\frac{dx}{ds} = \frac{a}{b}$. In oltre condotta la *ſunnormale* BO, ſappiamo eſſer la ſteſſa $BO = \frac{ky}{a}$; e perciò il raggio dell' oſculo DO è al preſente $r = \frac{y\sqrt{aa + kk}}{a}$, che per brevità ſia $q = \sqrt{a^2 + k^2}$, quindi $DO = r = \frac{qy}{a}$: ſicchè differenziando, ſi ha $dr = \frac{q\,dy}{a}$. Onde ſoſtituendo tutti queſti valori, ſi ridurrà che $R = \frac{q}{2b} \times \frac{\overline{-ny^n dy - y^n dy}}{ds} - \frac{y^n dy}{ds} = \frac{y^n dy}{ds} \times \frac{\overline{nq - q - 2b}}{2b}$; e quivi ancora perchè la ragione di ds a dy l' abbiam data, la quale s'eſpri-

s' esprime num. 764. $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{b}$, onde è che verrà finalmente

$R = \frac{ky^n \times \overline{-nq-q-b}}{2b}$; vale a dire omesse le costanti, che la resistenza è proporzionale alle distanze y, a qualunque dignità n elevate, siccome si ritrovò poco anzi coll' altro canone.

777. Prendasi per la Densità num. 760. $D = \frac{dds}{2ds^2} - \frac{df}{2fds} - \frac{dr}{2rds} - \frac{dy}{rdx}$, dove per esser $dds = o$, ed altresì per l'operazione medesima, che fatto abbiamo nella resistenza, verrà $D = \frac{-ny^{-1}dy - y^{-1}dy}{2ds} - \frac{ay^{-1}dy}{qdx}$; ma poichè si ha sopra $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{b}$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{k}{a}$, risulterà in fine $D = \frac{k}{2k} \times \frac{\overline{-n-1}}{y} - \frac{k}{q} \times \frac{1}{y}$; cioè nell' inversa delle distanze, come sopra.

778. Abbiamo che viene espressa la velocità con $u^2 = \frac{fpdy}{dp}$, siccome $p = \frac{ydx}{ds}$ num. 743. e stando dx costante, differenziando di nuovo quest' ultima equazione, è $dp = \frac{dydxds - ydxdds}{ds^2}$; perciocchè ponendovi i respettivi valori; avremo $u^2 = y^{n+1}$, siccome fu sopra. Sarà ancora il tempo lo stesso che nell' altro caso, cioè $dt = \frac{ds}{\sqrt{y^{n+1}}}$.

ESEM-

ESEMPIO II.

Tav. 14. Fig. 6. 779. La Curva data sia la Spirale Iperbolica, costruendo come sopra e le denominazioni stesse restando, giacchè ha per passione d'aver essa la sottotangente costante, che sia $= a$, tengasi, siccome di questa Curva fu parlato al num. 527. che $p = \frac{ay}{\sqrt{a^2 + y^2}}$, e $dp = \frac{a^3 dy}{\overline{y^2 + a^2}^{\frac{3}{2}}}$, facendo dy costante col differenziar di nuovo, riesce $ddp = 0$; e però dove dy fu preso costante, num. 755. si dovrà sostituire, ritenendo primieramente num. 776. $f = y^n$.

780. Così poscia $R = \frac{-ny^2 y^{n-1} dy^2}{2ds} \times \frac{ay}{\sqrt{aa + yy}} \times \frac{\overline{yy + aa}^{\frac{3}{2}}}{a^3 dy} - \frac{3y^n dy}{2ds} = \frac{-ny^n dy}{2a^2 ds} \times \overline{yy + aa} - \frac{3y^n dy}{2ds}$. In oltre dall' equazione della curva citata sappiamo essere $ydx = ady$, e $ds = \frac{dy}{y}\sqrt{y^2 + a^2}$; quindi verrà $R = \frac{-ny^{n+1}\sqrt{y^2 + a^2}}{2a^2} - \frac{3y^{n+1}}{2\sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{-ny^{n+1} \times \overline{y^2 + a^2} - 3a^2 y^{n+1}}{2a^2\sqrt{y^2 + a^2}}$.

781. La Densità $D = \frac{-df}{2fds} - \frac{3dp}{2pds}$ num. 756. diverrà $D = \frac{-n}{2\sqrt{y^2 + a^2}} - \frac{3a^2}{2 \times \overline{y^2 + a^2}^{\frac{3}{2}}} =$

$-n$

$\dfrac{-n\times\overline{y^2+a^2}^{\frac{3}{2}}-3a^2\sqrt{y^2+a^2}}{2\times\overline{y^2+a^2}^{2}}$, donde ſcorgeſi riſultare tutte due negative.

782. Parimente $u^2=\dfrac{fp\,dy}{dp}$, verrà egli $u^2=\dfrac{ay^{n+1}dy\times\overline{y^2+a^2}^{\frac{3}{2}}}{a^3dy\sqrt{y^2+a^2}}=\dfrac{y^{n+1}\times\overline{y^2+a^2}}{a^2}$. Sicchè il tempo è poi $dt=\dfrac{ads}{\sqrt{y^{n+1}\times\overline{y^2+a^2}}}$.

C O R O L L A R I O I.

783. Secondo il diviſato metodo varj valori potrebbonſi aſſegnare alla dignità n, come altresì con ſegno negativo prenderla, ſiccome in conſimili caſi ſi è praticato, ma per averſi veduta altrove la maniera di farlo, ſtimo ſuperfluo l' eſtendermi ſu tali eſempj, e perciò paſſeremo ad altre ſuppoſizioni di dati, ritenendo nota ſempre la Curva.

P R O B L E M A III.

Data la Curva, e la Reſiſtenza, dedurne la forza, velocità, e tempo. Tav.14. Fig. 3.

784. Appellata come ſopra $CB=y$, e $BD=dx$, ſicchè $BE=ds$, ed in B aſceſo il corpo, la velocità ivi $=u$, e la forza $=f$ in tal punto, ſarà ſempre vero che $-\dfrac{u^2dp}{p}-Rds=udu$, e perciò ſiccome

 $p=$

$p = \frac{y\,dx}{ds}$ num. 743. e $dp = \frac{dy\,dx\,ds - y\,dx\,dds}{ds^2}$ differenziando, e costante dx, sostituendo risulta il canone predetto $-\frac{u^2 dy}{y} + \frac{u^2 dds}{ds} - R\,ds = u\,du$; da cui per aversi date, secondo la condizion del problema le resistenze in qualche modo, e di più la Curva medesima, le velocità cercate, parimente date verranno.

785. Avute le medesime, per essere $f = \frac{u^2 dp}{p\,dy}$, data pure verrà la forza, surrogando queste; dove se vogliamo anco porvi il valore di p, e della sua differenza num. precedente, la ridurremo in $f = \frac{u^2 \times \overline{ds\,dy - y\,dds}}{y\,ds\,dy}$. Dalla data velocità col solito artificio potremo ricavarne il tempo scorso, sostituendola nel più volte mentovato canone.

COROLLARIO I.

786. Avvegnachè le resistenze si pongan date, e per quelle quantità all' equazion della Curva spettanti, e parimente date dalla velocità, e però secondochè questa ha proporzione con le medesime resistenze, o si potrà, o non si potrà integrar l' equazione, secondo l' ipotesi; Dunque per non allungarci nello scorrere i casi tutti, ponghiamo che $u^2 = R$, vale a dire le resistenze suddette costanti, cioè $D = 1$: onde il canone generale della salita sopra mentovata nel problema, risulterà come al num. 748. $u^2 = \frac{P^2 U^2}{p^2 q^{2t}}$, che sarà l' espres-

l' espressione della velocità ; di poi essendo $p^2 = \frac{y^2 dx^2}{ds^2}$, ne verrà dunque $u^2 = \frac{P^2 U^2 ds^2}{y^2 q^{2s} dx^2}$.

COROLLARIO II.

787. La potenza eziandio sostituendo in luogo dell' u^2 nella legge nota, e fissata sopra, verrà $f = \frac{P^2 U^2 ds^2}{y^2 q^{2s} dx^2} \times \overline{\frac{dsdy - ydds}{ydyds}}$, e siccome $dds = \frac{dyddy}{ds}$, onde $f = \frac{P^2 U^2 ds^2}{y^2 q^{2s}} \times \overline{\frac{ds^2}{ydx^2} - \frac{ddy}{dx^2}}$.

COROLLARIO III.

788. E' pure il tempo $dt = \frac{pq^s ds}{PU} = \frac{yq^s dsdx}{PUds} = \frac{yq^s dx}{PU}$.

COROLLARIO IV.

789. Così adunque in ogni particolar caso si potranno avere le consuete ricerche per ogni specie di Curve, che verremo a supporre, allorchè vi si intrometteranno i valori dall' equazion della Curva data somministrati, conforme si è praticato in casi simili; onde tralasceremo d' esemplificar da vantaggio.

COROLLARIO V.

790. In altra maniera pure le nominate espressioni di quantità cercate aver potrannosi, cioè deducendole dalla precitata legge $-\frac{u^2 dp}{p} - R ds = u du$; cioè così, si moltiplichino tutti i membri dell' equazione per $2p^2$, affinchè ne venga $-2Rp^2 ds = 2u^2 p dp + 2p^2 u du$; e di poi integrando $-\int 2Rp^2 ds = u^2 p^2$, cioè $\frac{-\int 2Rp^2 ds}{p^2} = u^2$, vale a dire le velocità, che si cercano.

COROLLARIO VI.

791. Sicchè avrassi per la forza, col mettere tal valore in $f = \frac{u^2 dp}{p dy}$, $f = \frac{-dp\int 2Rp^2 ds}{p^3 dy}$; dove in luogo della resistenza mettendovi il preciso valore, che dal supposto vorremo, ed avremo o coll' Algebra integrata l' equazione, o trascendente.

COROLLARIO VII.

792. Sonosi poste le Resistenze ch' elle abbiano rapporto alle velocità, e densità insieme, però possono esser le stesse alle distanze dal centro ancora proporzionali, siccome in qualche fatto particolare dal Newton, e da altri pure si suppongono. Onde facciasi per esempiò che $R = y^2$, col sostituire un tal valore in $-\int 2Rp^2 ds$ num. 790., avremo in primo luogo la velocità $u^2 =$

$-\int 2y^2$

$\frac{-\int 2y^2 p^2 ds}{p^2}$. Secondariamente per la potenza $f = \frac{-dp \int 2y^2 p^2 ds}{p^3 dy}$.

C O R O L L A R I O VIII.

793. Di più anche varie possono esser le Curve, nelle quali il projetto cammini, come posto abbiamo fin quì in altri casi, e perciò dalle quantità dedotte per le loro equazioni, col sostituire potremo inferirne il preciso valore di quanto fa d' uopo cercare; di che ne faremo vedere adesso qualche esempio.

E S E M P I O I.

794. La Curva dunque sia la Spirale logaritmica, già riportata per esempio num. 764. avendosi il caso poco fa accennato che $R = y^2$; posciachè al citato numero si ha che $p^2 = \frac{a^2 y^2}{c^2}$, e parimente dall' equazione della medesima costa, che sia $ds = \frac{dy}{k}\sqrt{k^2 + a^2}$, cioè $ds = \frac{t\,dy}{k}$, fatto per espediente che $t = \sqrt{k^2 + a^2}$, sostituendo Coroll. 7. precedente, viene $-\int 2 p^2 y^2 ds = \frac{-2\,t\,a^2 y^5}{5c^2 k}$, sicchè poi $u^2 = \frac{-2\,t\,a^2 y^5}{5c^2 k p^2} = \frac{-2\,t\,y^3}{5k}$:
E la forza poscia sarà $f = \frac{-2\,t\,y^2}{5k}$, intendendovisi sempre supplita la necessaria costante.

CO-

COROLLARIO I.

795. Qualora in vece della diretta fosse la resistenza nominata in ragione dell' inversa delle distanze, cioè $R = \frac{1}{y^2}$, diviene allora num. 790. $-\int 2Rp^2ds = \frac{-\int 2p^2ds}{y^2}$, e perciò la velocità suddetta ella è $u^2 = \frac{-2t}{ky}$. E la forza poi $f = \frac{-2t}{ky^2}$. E così altre ipotesi potran farsi della ricordata ragion reciproca, che per esser facili, e dallo stesso metodo a maneggiarle istrutti, si tralasceranno perciò, per non estenderci maggiormente.

F I N E.

Pagina.	*Verso.*	*Errori.*	*Correzioni.*
35.	6.	proporziole	proporzionale
48.	14.	considarata	considerata
52.	16.	faciltà	facilità
56.	4.	da'	dagli
226.	28.	lontanze	lontananze
233.	31.	dell'	dall'
272.	14.	$= Q$	$= P$
277.	18.	DU	dU
332.	8.	discotasi	discostasi
372.	16.	al	la

Adm. Rev. Dominus P. D. Balthassar Vulcanus Congregationis Benedictinorum S. Th. P. & Curiam Archiep. Exam. revideat, & in scriptis referat. Datum die 8. Aprilis 1764.

PHIL. EPISC. ALLIFANUS VIC. GEN.

JOSEPH SPARANUS CAN. DEPUT.

L' Opera del Dottor Barraloni intitolata *Meccanica Sublime* &c. non è contraria alla nostra Santa Fede, nè s' oppone in alcuna parte al buon costume, stimo dunque potersi dare alle Stampe, se così determina V. E., cui con pieno rispetto in tutto mi sottopongo.

D. V. E.

Dal Monistero di S. Severino li 12. di Febraro 1765.

Umiliss. Divotiss. Obbligatiss. Serv.
D. Baldassarre Vulcano

Attenta relatione Domini Revisoris imprimatur Datum die 13. Feb. 1765.

PHIL. EPISC. ALLIFANUS VIC. GEN.

JOSEPH SPARANUS CAN. DEP.

Adm.

Adm. Rev. U. J. D. D. Antonius Genovesi in hac Studiorum Universitate Regia Professor Primarius revideat, & in scriptis referat. Datum Neapoli die 18. mensis Aprilis 1764.

NICOLAUS EPISCOPUS PUTEOLANUS CAP. MAJOR.

S. R. M.

LA *Meccanica sublime* dell' Abbate Dottor Bartaloni, che ho per ordine della M. V. con non minore attenzione, che piacere letta e considerata, non solo non contiene nulla, che possa comechessia offendere i dritti della Sovranità, e dello Stato, ma essendo ella indiritta a perfezionare la teorica e la pratica di quest'Arte madre fecondissima e nutrice di tutte le minori, per cui la vita umana, i corpi Politici, e la gloria e felicità de' Sovrani sostiensi, e diviene ciascun giorno più bella e lieta; merita bene non pure la luce delle stampe, ma l' applauso eziandio di tutti coloro, che s' interessano nel ben del genere umano. L' ha poi l' Ab. Bartaloni maneggiata da sì grande maestro, che benchè ella sia stata trattata da infinite mani de' dotti Europei, riceve nondimeno nel passar per le sue non che nuova maestà, ma un certo lume netto e brillante, sia de' pensieri e delle dimostrazioni, sia di stilo, che potrebbe fare altrui credere essere una Scienza del tutto nuova. Son sicuro, che l' Italia tutta quanta gliene dovrà grado, considerando, che non è spento l' antico valore de' Galilei, de' Viviani, de' Torricelli, e d' altri molti, i quali le fanno corona, ch' anzi vada prendendo un certo tal nuovo vigore, da potersi lusingare di vedersi rimessa nell' antico suo onorevole stato di maestra degli altri popoli Europei. Ma, Signore, l' ingegno è un certo genio, che non prende mai tutto il suo volo, nè infonde ai popoli, per cui s' aggira, i suoi benefici influssi, senza il caldo alito, e 'l benigno accarezzamento del volto vitale de' Sovrani. E tanto è quel, che a me pare di poter dire alla M. V. del presente libro. E prostrato umilmente innanzi al suo Real Trono, sono

Della M. V.

Casa 29. Aprile 1765.
Umiliss. Vassallo e Regio Lettore
Antonio Genovesi.

Die 25. Mensis Junii 1765. Neapoli.

V*Iso rescripto suæ Regalis Majestatis sub die 15. currentis mensis, & anni, ac relatione U. J. D. D. Antonii Genovesi de Commissione Reverendi Regii Cappellani Majoris, ordine præfatæ Regalis Majestatis.*

Regalis Camera Sanctæ Claræ providet decernit, atque mandat, quod imprimatur cum inserta forma præsentis supplicis libelli, ac approbationis dicti Revisoris. Verum in publicatione servetur Regia Pragmatica hoc suum.

DE FIORI. VARGAS MACCIUCCA.

Illustris Marchio Citus Preses S. R. C. tempore subscriptionis impeditus, & cæteri Illustres Aularum Præfecti non interfuerunt.

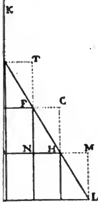
Reg. fol. 121.

Carulli.

Athanasius.

Tav. I.

Fig. 2.



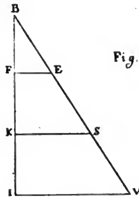


Fig. 3.

Fig. 5.

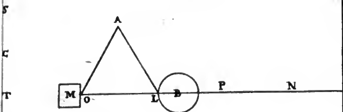
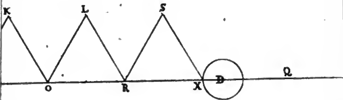


Fig. 6.



Dom. dell'Acerra

Tav. II

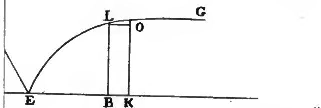


Fig. 2.

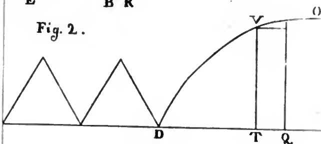
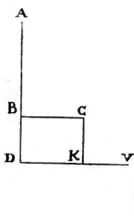


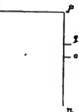
Fig. 5.



Fig. 6.







Dom. dell'Acerr

Tav. III.

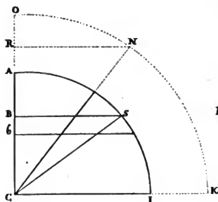
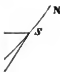


Fig. 2.



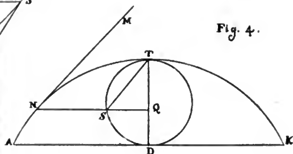
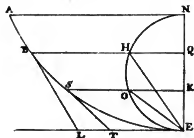


Fig. 4.

Fig. 6.



Dom. dell'Acerra s.

Tav. IV.



Fig. 1.



Fig. 2.

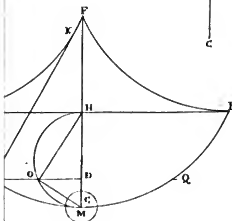
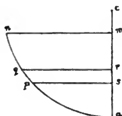
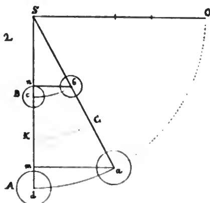


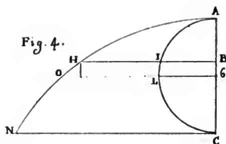
Fig. 5.

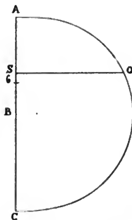


Dom. dell' Acerra S.

Tav. V.



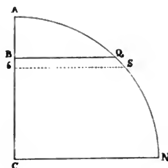




Dom. dell Acerra S.

Tav. VI.

Fig. 2.



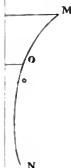
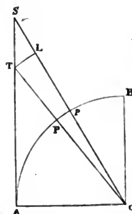


Fig. 5.



Fig. 4.

Fig. 6.



Dom. dell' Acq.

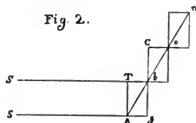


Fig. 2.

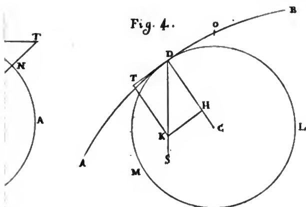


Fig. 4.

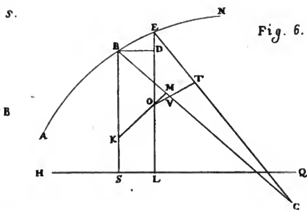


Fig. 6.

Dom. dell Acerr. a S.

Tav. VIII.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 5.

Dom. dell'Acerra S.

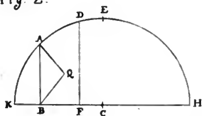


Fig. 2.

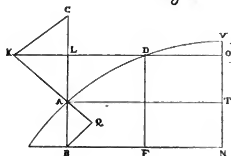


Fig. 4.

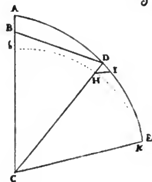
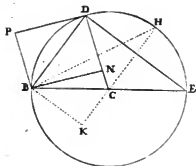


Fig. 6.

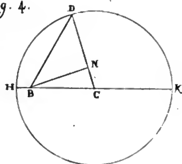
Ta

Fig. 2.



E

Fig. 4.



K
E

Fig. 5.



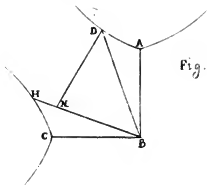
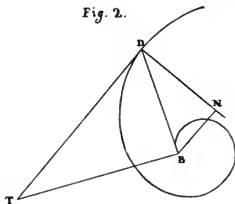
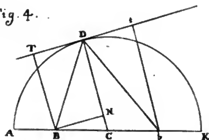


Fig. 6

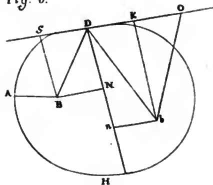
...dell'Aversa sc.

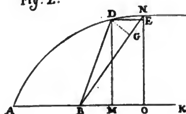
1.





g. 5.

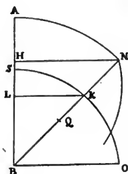


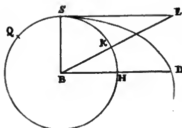


. 3.

Q

E r h





Dom. dell'Acerra F.

Fig. 2.

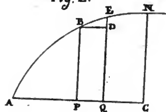
Fig. 4.

Fig. 6.

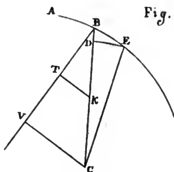
Dom. dell Acerra f.

Tav. XIV.

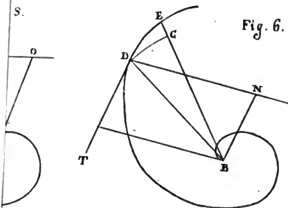




3.



5.



Dom. dell'Acerra F.





